

Wolfgang Kleber

Die KUNST DER FUGE - als Fragment vollkommen

Neue Fassung, April 2025



„... das Wertvollste, was wir mit Bachs Musik geerbt haben: die Schau bis ans Ende der dem Menschen möglichen Vollkommenheit ...“

Paul Hindemith, 12.9.1950 auf dem Bachfest in Hamburg

Inhalt

EINLEITUNG	3
IN STYLO FRANCESE	8
FUGA A 3 SOGGETTI.....	11
DAS HAUPTTHEMA IN DER FUGA	15
SPIEGELSYMMETRIEN	18
DIE ZAHL 239	20
DER TITEL DES ZYKLUS	22
PYTHAGOREISCHE TRIPEL	24
DER GOLDENE SCHNITT	34
DIE ZAHL 18	35
DIE SINGULÄRE TRIOLE	40
FIBONACCI-FOLGE.....	44
DIE ZAHL 15	46
DREIMAL 372	48
Contrapuncti 1 bis 4, 372 Takte	49
Contrapuncti 8 und 11, 372 Takte	51
Canones, 372 Takte	54
SCHNECKEN UND KREISE	57
PROPORTIONALE ZUORDNUNG ALLER EINZELKOMPOSITIONEN ZUR FUGA .	62
Die Teile der FUGA entsprechen jeweils dem Umfang eines Kreises.	62
Die Teile der FUGA entsprechen jeweils dem Radius eines Kreises	64
DER CHORAL	69
Die Parallele zur Leipziger Orgelhandschrift	70
Die Überleitung.....	71
Generalpausen.....	72
DER DREIKLANG	74
SCHLUSSBEMERKUNG.....	77

Wolfgang Kleber

Die KUNST DER FUGE - als Fragment vollkommen

Neue Fassung 2024, aktualisiert und ergänzt¹, Stand März 2025

EINLEITUNG

Viel wurde geforscht und geschrieben über Johann Sebastian Bachs KUNST DER FUGE. Zahlreiche Untersuchungen insbesondere aus den letzten Jahrzehnten bieten sehr unterschiedliche Lösungen zum Verständnis dieses faszinierenden und rätselhaften Werkes.²

¹ Wesentliche Ergänzungen finden sich insbesondere ab Seite 48 bzw. 62 und betreffen vorallem die proportionale Zuordnung der drei Teile der Fuga a 3 Soggetti zu den anderen Stücken.

² Nennen möchte ich hier die Arbeiten von Christoph Wolff, Hans Heinrich Eggebrecht, Walter Corten, Hans-Jörg Rechtsteiner, Hans-Eberhard Dentler, Lutz Felbick, Wolfgang Wiemer, Felix Pachlatko und Meinolf Brüser:

- Christoph Wolff, The last fugue unfinished? Current musicology, Columbia University NYC, No. 19 / 1975, Seite 71 ff.

<https://journals.library.columbia.edu/index.php/currentmusicology/issue/view/459/CurrentMusicology19>

- Hans Heinrich Eggebrecht, Bachs Kunst der Fuge, Piper Verlag München 1984

In der quellenkritischen Forschung und in der Forschung zu Bachs Umfeld sind in den letzten Jahrzehnten große Fortschritte gemacht worden. All denen, die auf diesem Gebiet gründliche Arbeit geleistet haben, möchte ich an dieser Stelle sehr danken.

Wie manch andere beschäftigt auch mich die Frage, ob Bach die KUNST DER FUGE vielleicht absichtlich „unvollständig“ hinterlassen haben könnte. Sie wäre nicht das einzige Kunstwerk in der Geschichte, das mit absichtsvollem Plan als scheinbares Fragment geschaffen wurde.

Die Komposition hat keinen regulären Schluss und erzeugt auf überaus starke Weise beim Lesen, Spielen und Hören die Erwartung, dass die Musik weitergehen müsste. Im dritten Teil der letzten Fuge wird eine ungeheure Spannung aufgebaut, bevor die vier Stimmen wie zufällig nacheinander aufhören, bis im letzten Takt eine einstimmige Floskel zwar den Grundton „d“ erreicht, dies jedoch auf der unbetonten Taktzeit „4+“ aus einer kleinen Terz von unten kommend.

Es lassen sich dennoch vielfältige symmetrische Proportionen in der Architektur des Zyklus und melodisch/rhythmische innere Bezüge nachweisen, die das Werk als in sich geschlossen, also vollständig erscheinen lassen.

Christoph Wolff hat in seiner Arbeit „The last fugue unfinished“³ dargelegt, warum er annimmt, dass die letzte Fuge, die FUGA A 3 SOGGETTI sehr wohl in einer längeren, „vollständigen“ Form fertig komponiert worden, aber verloren

- Corten, Walter: Clefs numériques dans l'Art de la Fugue de J.S. Bach? Revue Belge de Musicologie XLII (1988), S. 199-221, https://www.jstor.org/stable/3687109?read-now=1&seq=2#page_scan_tab_contents

- Hans-Jörg Rechtsteiner, Alles geordnet mit Maß, Zahl und Gewicht, Der Idealplan von Johann Sebastian Bachs Kunst der Fuge, 1995, 3. erweiterte und verbesserte Auflage, Selbstverlag Offenbach am Main, e-Book (PDF-Format), Version 2008

- Hans-Eberhard Dentler, Johann Sebastian Bachs „Kunst der Fuge“, Ein pythagoreisches Werk und seine Verwirklichung, 2004 Schott

- Lutz Felbick, Lorenz Christoph Mizler de Kolof - Schüler Bachs und Pythagoreischer „Apostel der Wolffischen Philosophie“, Olms Verlag, 2012, Dissertation, Hochschule für Musik und Theater „Felix Mendelssohn Bartholdy“ Leipzig.

- Wolfgang Wiemer, Die Kunst der Fuge - Bachs Credo, 2018 Böhlau Verlag

- Felix Pachlatko, Die letzten fünf gedruckten Werke von Johann Sebastian Bach: Innere und übergreifende Strukturen, 2019 Tectum Wissenschaftsverlag. Google Books

- Meinolf Brüser, Es ist alles Windhauch, 2024 Bärenreiter

³ Wolff, Seite 71

gegangen sei. Er begründet das überzeugend anhand des skizzenhaften Erscheinungsbildes der letzten autographen Seite. Doch bleibt die Frage offen, ob es wirklich sein kann, dass niemand aus Bachs Umfeld etwas von dem fehlenden Teil gesehen hätte.

Meinolf Brüser arbeitet in seinem 2024 erschienenen Buch „Es ist alles Windhauch – Bach und das Geheimnis der ‚Kunst der Fuge‘“⁴ mit quellenkritischen Beweisketten in der Art von juristischen Indizienbeweisen.

Der Ansatz meiner eigenen Untersuchungen ist ein anderer. Ich zeige in der vorliegenden Arbeit musikalische Beziehungen und mathematische Verhältnisse innerhalb der Komposition selbst, die insbesondere dann aufschlussreich sind, wenn sie ohne jegliches Bezugnehmen auf Befunde außerhalb des Werkes erkennbar sind. Aus Untersuchungen der Handschriften, der Korrekturen in Druckvorlagen, der Tinte- und Papiersorten etc. lassen sich viele wichtige Erkenntnisse gewinnen. Doch vieles bleibt auch ungeklärt beziehungsweise nur spekulativ erklärbar. Denn was wissen wir wirklich über ein Werk, nachdem wir geklärt haben, welcher Schreiber in welchem Jahr ein uns vorliegendes Notenblatt geschrieben hat? Über den Zeitpunkt der Entstehung der Komposition wissen wir nur, wann sie *spätestens* aufgeschrieben oder kopiert wurde. Sie kann also auch schon früher entstanden sein. Auch können wir nicht unbedingt wissen, ob ein uns vorliegendes Notenblatt die letztlich beabsichtigte Gestalt der Komposition wiedergibt.

Meinolf Brüser befasst sich ausführlich mit der Frage, warum im Originaldruck der FUGA A 3 SOGGETTI⁵ die letzten sieben Takte des Autographs fehlen. Er kommt zu dem Schluss, dass die Version des Druckes die von Johann Sebastian Bach gewollte sei.⁶ Seine Begründung leitet er aus zwei kleinen Details in Takt 233 ab. Im Druck ist bereits dort das Ende der FUGA. Im Autograph jedoch leitet danach der Alt die letzten Takte mit der Kombination der drei Themen ein. Im Druck steht die Abbruchstelle ganz am Ende des Notenblattes, so dass eventuell vorgesehene weitere Takte auf dem folgenden Blatt stehen müssten. Üblicherweise wird an solchen Stellen mit einem speziellen Zeichen, dem Custos, angezeigt, mit welchem Ton es in der nächsten Zeile weiter geht. Hier, am Ende der Druckseite, steht in der Altstimme jedoch ein Custos, der nicht zu

⁴ Meinolf Brüser, Es ist alles Windhauch, 2024 Bärenreiter

⁵ Im Folgenden meist kurz FUGA genannt

⁶ Brüser, S. 71 ff.

den Tönen passt, die in der autographen Version im Anschluss an diese Stelle folgen. Außerdem haben Tenor und Bass im Takt 233 im Druck andere Notenwerte als im Autograph. Daraus ist zu schließen, dass die Druckfassung mit dem Abbruch der FUGA in Takt 233 nicht auf eine korrekte Abschrift der erhaltenen autographen Fassung zurückgeht. Ob es aber zur Abweichung im Notentext aus Versehen oder aus Unwissenheit oder absichtlich gekommen ist, wissen wir nicht. Wir kennen nicht die Druckvorlage. Das vorhandene Autograph wurde zumindest nicht unmittelbar als Druckvorlage verwendet, denn die Stimmen sind nicht wie bei allen anderen Teilen der KUNST DER FUGE in Partitur notiert, sondern auf zwei Systemen. Alle anderen Teilkompositionen sind auch im Autograph in Partitur notiert (Ausnahme ist CONTRAPUNCTUS 4, von dem kein Autograph erhalten ist). Das Autograph der FUGA A 3 SOGGETTI könnte dennoch die Urform des Notentextes enthalten; die FUGA wäre dann für die Druckvorlage auf vier Systeme übertragen worden. In irgendeinem Arbeitsschritt wäre die FUGA von 239 Takten (Autograph) auf 233 Takte (Druck) verkürzt worden. Umgekehrt ist aber auch denkbar, dass die gedruckte Version der FUGA die *ältere* Fassung darstellt und auf ein nicht erhaltenes Autograph mit nur 233 Takten zurück geht. Immerhin ist bemerkenswert, dass der dritte Teil, also die B-A-C-H-Fuge, bis zum Abbruch in Takt 233 genau 41 Takte hat und damit den Buchstabenwert von j+s+b+a+c+h repräsentiert. Das könnte auf eine Absicht des Komponisten hinweisen. Es könnte aber auch Zufall sein. Jedenfalls besteht auch die andere Möglichkeit, dass nämlich Bach das erhaltene Autograph, welches gemäß der graphologischen Untersuchung sehr spät verfasst wurde, erst *nach* der Vorbereitung des Druckes der FUGA A 3 SOGGETTI verfasste und dabei die FUGA um sieben Takte erweiterte; diesmal nicht in vierstimmiger Partitur, sondern auf zwei Systemen. In diesem Fall gibt die Version des Autographen den letzten Willen des Komponisten wider, nicht die Druckversion. Laut Rechtsteiner wurde in der ersten Jahreshälfte 1748 mit den Stecharbeiten der KUNST DER FUGE begonnen, das Autograph der FUGA wurde möglicherweise erst Ende 1749 geschrieben.⁷ Das erhaltene Autograph kann daher durchaus jünger sein als die Druckplatten für das gleiche Werk.

Und dann könnte die berühmte Notiz von Carl Philipp Emanuel auf dem letzten Notenblatt des Autographen einen neuen Sinn ergeben. Im Vorwort des Erstdruckes hieß es noch: „...Der selige Herr Verfasser dieses Werkes wurde durch seine Augenkrankheit und den kurz darauf erfolgten Tod ausser Stande

⁷ Rechtsteiner, S. 12-13

gesetzt, die letzte Fuge, wo er sich bey Anbringung des dritten Satzes namentlich zu erkennen giebet, zu Ende zu bringen....“ Auf dem letzten Blatt des Autographs lesen wir (dieser handschriftliche Eintrag Carl Philipp Emanuels wird heute später datiert als der Erstdruck⁸): „...über dieser Fuge, wo der Name BACH als Contrasubjekt angebracht worden, ist der Verfasser gestorben“. Vielleicht ist gemeint: „über *dieser* Fuge, nicht über der anderen Fuge, nämlich der Version der gedruckten Ausgabe...“. Das würde bestätigen, dass die autographe Fassung Bachs letztem Willen entspricht. Es handelt sich zwar nach derzeitigem Forschungsstand nicht um die letzten von Bach geschriebenen Noten. Aber an der KUNST DER FUGE hat er nichts weiteres hinzugefügt. Ich halte es daher für angebracht, für die Untersuchungen der Proportionen des Gesamtwerkes KUNST DER FUGE die FUGA A 3 SOGGETTI in der längeren autographen Version als maßgeblich zu betrachten.

Ich habe das Werk darauf hin untersucht, ob es Strukturen enthält, die gerade dann Symmetrien erkennen lassen, wenn es eben nicht zu einem konventionell „vollständigen“ Werk ergänzt wird. Dabei bin ich verschiedenen Details in der Partitur nachgegangen, die mir beim Spielen dieser wunderbaren Musik über mehrere Jahrzehnte nach und nach aufgefallen sind und Fragen nach dem Warum aufgeworfen haben. Natürlich stößt man auf zahlreiche symbolisch besetzte Zahlen wie 14 (BACH), 29 (JSB, SDG), 41 (JSBACH), doch ist mit ihnen nichts zu beweisen. Zu groß ist die Wahrscheinlichkeit von Zufallstreffern; man betrachte z. B. einmal all die vielen Takte, deren Quersumme 14 beträgt....

Wenn es darum geht, einigermaßen robuste Aussagen zu machen, hilft meines Erachtens die Suche nach werkinternen Bezügen, nach klar definierten Proportionen insbesondere zwischen der FUGA und den anderen Teilen des Zyklus KUNST DER FUGE. Das vielleicht „beweiskräftigste“ Ergebnis meiner Untersuchungen möchte ich schon hier kurz andeuten. Es gibt tatsächlich ein mathematisches einheitliches Prinzip, nachdem sämtliche Einzelstücke zueinander im Verhältnis stehen. Es ist die Kreisformel.⁹

Bevor ich dies beschreibe, zeige ich sehr unterschiedliche Befunde auf, die durchaus auf Zufällen beruhen können, aber doch sehr bemerkenswert sind.

⁸ Brüsing, S. 131

⁹ Siehe S. 62 ff.

IN STYLO FRANCESE

Warum ist CONTRAPUNCTUS 6 überschrieben mit „in Stylo Francese“? Jeder „Kenner“ (wie Bach verschiedentlich die Zielgruppe seiner Musik nennt) sieht dieser Fuge sofort an, dass sie im Stil einer Französischen Ouverture geschrieben ist. Bach hätte es nicht extra in den Titel schreiben müssen. Dieses Stück ist die mittlere von drei Gegenfugen. In ihnen erklingt das Hauptthema sowohl in seiner Originalgestalt als auch in seiner Spiegelung. Hinzu treten in CONTRAPUNCTUS 6 auch Themeneinsätze in verkleinerten Notenwerten (per diminutionem) und in CONTRAPUNCTUS 7 zusätzlich in vergrößerten Notenwerten (per augmentationem). CONTRAPUNCTUS 7 trägt in der Überschrift den Zusatz „per Augment. et Diminut.“. Dementsprechend hätte über CONTRAPUNCTUS 6 der Zusatz „per Diminutionem“ stehen können. Dort heißt es aber nur „in Stylo Francese“. Bach hat wohl ganz bewusst das Augenmerk auf die stilistische Anspielung auf die Form der Französischen Ouverture gelenkt.

Warum steht die Ouverture nicht am Anfang der KUNST DER FUGE, wo sie als Ouverture, als Eröffnung den richtigen Platz hätte?

Beim Vergleich mit Ouverturen in anderen Zyklen Bachs finden wir die Antwort. In den sechs Partiten ist nur das Eröffnungsstück der vierten Partita mit Ouverture überschrieben. In den Goldberg-Variationen beginnt die zweite Hälfte mit einer Ouverture. Auch im dritten Teil der Clavier-Übung beginnt die zweite Hälfte mit einem Stück im Stil einer Französischen Ouverture (Choral „Wir glauben all“, manualiter).

Aus dem Vergleich mit diesen anderen Zyklen dürfen wir schließen, dass auch in der KUNST DER FUGE die Französische Ouverture eine zweite Gruppe von Einzelstücken eröffnet.

Sie gliedert den Zyklus in eine erste Gruppe von fünf Stücken (vier einfache Fugen und eine Gegenfuge mit feierlichem sechsstimmigem Abschluss, in dem das Thema und seine Spiegelung gleichzeitig erklingen), und eine zweite Gruppe von dreizehn Stücken. Diese Gliederung wird angezeigt durch die Überschrift „in Stylo Francese“.

Für alles Weitere muss ich zunächst erläutern, wie ich die Einzelstücke und die Anzahl ihrer Takte zähle. Dies wird nämlich in der Fachliteratur durchaus unterschiedlich gehandhabt.

Ich gehe von 18 Einzelstücken mit einer Gesamtzahl von 1962 Takten aus. Dabei wird jede Komposition und jeder komponierte Takt nur ein einziges Mal

gezählt. Das gilt für Wiederholungen (in den CANONES) und für Varianten (von CONTRAPUNCTUS 10 gibt es im Erstdruck zwei Versionen: eine kürzere aus dem Autograph und eine neuere längere. Gezählt wird nur die längere). Und es gilt für die Spiegelfugen CONTRAPUNCTUS 12 und 13. Die Spiegelfugen stellen meines Erachtens eine spezielle Art der Wiederholung dar. Es handelt sich bei der Spiegelung nicht um eine neue eigenständige Komposition von eigener Struktur und Thematik. Es ist zweimal dasselbe Stück zu spielen, nur wird in der Wiederholung Oben und Unten Note für Note in allen Stimmen vertauscht.

Zur dreistimmigen Spiegelfuge (CONTRAPUNCTUS 13) gibt es darüber hinaus die Bearbeitungen für zwei Klaviere; diese zeigen eine zusätzliche Art, den CONTRAPUNCTUS 13 aufzuführen, nämlich mit einer ergänzten Stimme. Auch diese Bearbeitungen werden hier nicht extra gezählt.

Man könnte einwenden, dass es konsequent wäre, auch bei den CANONES DECIMA und PER AUGMENTATIONEM nur die erste Hälfte zu zählen, da die zweite Hälfte genau die gleiche Musik bringt, nur mit vertauschten Stimmen bzw. geänderter Tonhöhe. Dies ist aber gar nicht möglich. Es handelt sich um ungeradzahlige Längen von 103 bzw. 109 Takten, so dass halbe Takte zu zählen wären. Überleitungen und Schluss müssten separat behandelt werden. Nein, diese Kanons sind in voller Länge zu zählen, anders als der Oktav- und der Duodezimakanon, die mit Wiederholungszeichen notiert sind.

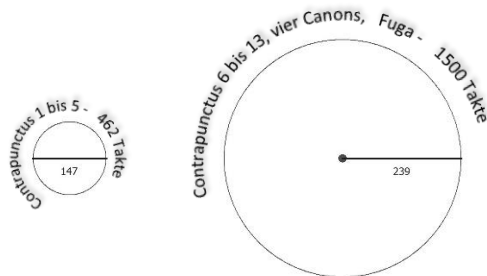
Die erste Gruppe hat 462 Takte, die zweite 1500 Takte¹⁰, wohlgemerkt: genau dann, wenn die FUGA A 3 SOGGETTI mit dem letzten im Autograph notierten Takt endet. Es ist der 239. Takt. Zwischen den Zahlen 462 bzw. 1500 und der Zahl 239 gibt es ein mathematisch klar definiertes Verhältnis, nämlich das Verhältnis vom Umfang eines Kreises zu seinem Radius bzw. Durchmesser.

Vorausgesetzt, Bach wollte mit dem Zusatz "in Stylo Francese" die Aufteilung des Zyklus in zwei Gruppen an dieser Stelle kennzeichnen, stellen wir fest, dass die jeweilige Anzahl der Takte beider Gruppen in einem unmittelbaren mathematischen Verhältnis zur Taktzahl der FUGA A 3 SOGGETTI steht:

Die Taktzahl der ersten Gruppe (462) entspricht dem Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser dem Goldenen Schnitt (147) der Taktzahl der FUGA A 3 SOGGETTI entspricht.

¹⁰ Die Auflistung der Einzelstücke findet sich am Ende der vorliegenden Abhandlung.

Die Taktzahl der zweiten Gruppe (1500) entspricht dem Umfang eines Kreises, dessen Radius der Taktzahl der FUGA A 3 SOGGETTI (239) entspricht.¹¹



Jede Verlängerung der FUGA würde dieses Verhältnis zunichte machen. Denn nach der Kreisformel $U=2\pi r$ bewirkt die Vergrößerung des Radius um einen gewissen Betrag eine Vergrößerung des Umfangs um mehr als das Sechsfache dieses Betrages. Dies ist aber im Falle der KUNST DER FUGE nicht möglich, denn die Länge der FUGA wird sowohl als Radius abgebildet als auch als Teil des Kreisumfangs. Eine Verlängerung der FUGA z. B. um 10 Takte auf 249 Takte bedeutet eine Verlängerung der 2. Gruppe, welche die FUGA enthält, von 1500 auf 1510 Takte. Nach der Kreisformel müsste die 2. Gruppe jedoch um 63 Takte auf 1563 erweitert werden. Das eine schließt das andere aus.

Rein rechnerisch ist eine Verlängerung der FUGA nicht möglich, - falls solche Kreisberechnungen in Bachs Sinne sind. Es sei denn, man würde an einer weiteren Stelle im Zyklus eine Ergänzung vornehmen. Da es kein anderes unvollständig erscheinendes Stück im Zyklus gibt, das zu verlängern wäre, bleibt nur zu prüfen, ob die Berechnung stimmig wird, wenn man Varianten hinzuzählt oder den CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“.

Möglich jedoch erscheint nach diesem Verfahren eine Verlängerung der FUGA um 24 auf 263 Takte. Der Kreisumfang würde um $2 \cdot \pi \cdot 24 = 150,79$ länger werden. Der Betrag 150,72 würde zusammengesetzt aus 24 und 126,79. Die zweite Zahl entspricht gerundet der Taktzahl der Spiegelfugen. Wir müssten sie in diesem Gedankenexperiment nun doch nicht nur einfach, sondern doppelt zählen. Auf diese Weise könnte das bestehende Verhältnis von FUGA (= Radius) und der

¹¹ Die Abweichung des Rechenergebnisses von der gegebenen Taktzahl 239 ist minimal. Die einfache, vielleicht von Bach verwendete Rechenmethode ergibt:

$1500 : 3,14 : 2 = 238,85$.

Auch bei der Berechnung mit π muss nur wenig auf 239 aufgerundet werden:

$1500 : \pi : 2 = 238,73$.

zweiten Gruppe (= Umfang) bei einer Ergänzung der FUGA um 24 Takte erhalten bleiben. Keine Möglichkeit sehe ich jedoch für das Verhältnis der FUGA (deren Goldener Schnitt 147 = Durchmesser) zur ersten Gruppe (462 = Umfang), denn in der ersten Gruppe gibt es keine Spielräume bei der Zählung der Takte. Sie kann nicht erweitert werden. Somit kann auch der Durchmesser nicht vergrößert werden. Die Maße im Kreis des ersten Teils würden gleich bleiben; die Zahl 147 hätte keinen Bezug mehr zu den Proportionen der FUGA. Wenn wir Gruppe 1 jedoch durch den CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“ ergänzen, kommt er auf 507 Takte; der Durchmesser beträgt dann 161 Takte. Steht diese Zahl in einem Verhältnis zu einer erweiterten FUGA? Wenn man 161 als Goldenen Schnitt der erweiterten FUGA annimmt, beträgt ihre Taktzahl hochgerechnet 261 Takte. Diese Zahl stimmt ungefähr überein mit der oben errechneten Zahl bei einer Erweiterung der FUGA um 24 auf 263 Takte. Aber lässt sich im 161. Takt der FUGA etwas Besonderes in der Musik erkennen? Im Takt 161 von vorn gezählt nicht. Von hinten gezählt vielleicht durchaus. Dann ist es ungefähr der Takt 101, der sich durch den Tritonusvorhalt auszeichnet, siehe unten auf Seite 28. Es ist aber zu bemerken, dass die Zahlen hier weniger genau sind als die Zahlen in den anderen beschriebenen Berechnungen. Abweichungen um ein bis zwei ganze Takte lassen sich nicht durch Auf- oder Abrunden ausgleichen, so dass rein rechnerisch eine Verlängerung der FUGA um 24 Takte nicht überzeugt.

FUGA A 3 SOGGETTI

Im nächsten Schritt dieser Arbeit steht dasjenige Einzelstück im Mittelpunkt, welches das Fragmentarische selbst unmittelbar zum Ausdruck bringt, die FUGA A 3 SOGGETTI.

Johann Sebastian Bachs KUNST DER FUGE enthält in dem 1751 postum veröffentlichten Erstdruck als letztes Einzelstück (vor dem hinzugefügten CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“) eine sehr umfangreiche vierstimmige Fuge. Sie ist nicht wie die anderen drei- und vierstimmigen Einzelstücke mit „CONTRAPUNCTUS“ überschrieben, sondern trägt den Titel „FUGA A 3 SOGGETTI“. Im Autograph hat sie keinerlei Überschrift. Sie bricht im Autograph im 239. Takt ab, im Erstdruck bereits sechs Takte früher.

Diese Fuge wird heute im allgemeinen als CONTRAPUNCTUS 14 bezeichnet. Ich bin jedoch mittlerweile zu der Einschätzung gelangt, dass die Unterscheidung

zwischen den Titeln „CONTRAPUNCTUS“ und „FUGA“ vom Komponisten gewollt ist. Deshalb bleibe ich bei dem Titel FUGA A 3 SOGGETTI, kurz FUGA.

Schon in der ersten Bach-Biographie¹² lesen wir über diese Komposition: „Die vorletzte Fuge hat 3 Themata: im dritten gibt sich der Componist namentlich durch b a c h zu erkennen. Diese Fuge wurde aber durch die Augenkrankheit des Verfassers unterbrochen, und konnte, da seine Operation unglücklich ausfiel, nicht vollendet werden. Sonst soll er Willens gewesen seyn, in der allerletzten Fuge 4 Themata zu nehmen, sie in allen 4 Stimmen umzukehren, und sein großes Werk damit zu beschließen“. Forkel schreibt „vorletzte Fuge“. Vermutlich meint Forkel mit der *letzten* Fuge den CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“, denn die drei freien Stimmen sind in Fugentechnik gearbeitet. Als „allerletzte“ Fuge bezeichnet er wohl einen nicht vorhandenen vierten Teil der FUGA. Forkel beruft sich auf seinen persönlichen mündlichen und schriftlichen Austausch mit Friedemann und Carl Philipp Emanuel Bach sowie einen „kleinen Aufsatz in Mitzlers Bibliothek“¹³.

Wie heute gut bekannt ist, kann in der Tat das Hauptthema der KUNST DER FUGE mit den drei Eigenthemen der FUGA kombiniert werden. Die FUGA hätte eine Quadrupelfuge werden können. Aus dieser Tatsache und aus Forkels Hinweis „soll er Willens gewesen sein.....“ liegt die Folgerung nahe, dass der Titel „FUGA A 3 SOGGETTI“ nicht auf den Komponisten zurückzuführen sei, sondern von den Herausgebern des postum fertiggestellten Erstdrucks gewählt wurde, da in dem von der FUGA erhaltenen Notenmaterial nur drei Themen deutlich zu sehen sind. Nun stehen wir allerdings vor der Frage, warum die genannten Bach-Söhne einerseits Forkel gegenüber den Plan von vier miteinander zu verarbeitenden Themen erwähnt haben, andererseits als die maßgeblichen Herausgeber des Erstdrucks einen offenbar falschen Titel für diese Fuge gewählt haben sollten. Und vorallem: warum nicht „CONTRAPUNCTUS“ wie alle anderen drei- und vierstimmigen Fugen im Zyklus?

Die Möglichkeit, dass der Titel FUGA A 3 SOGGETTI in Wirklichkeit Johann Sebastian Bachs Absicht entspricht, ist zumindest nicht auszuschließen, zumal der Komponist nachweislich am Erstdruck zum großen Teil noch selbst mitgewirkt hat.

¹² Johann Nikolaus Forkel, Ueber Johann Sebastian Bachs Leben, Kunst und Kunstwerke, Leipzig 1802, Faksimile Nachdruck Bärenreiter Verlag, S. 94

¹³ Forkel, Seite 12

Für Anhänger der Gematrie sei darauf hingewiesen, dass der Titel mit seinen 13 Buchstaben und *einer* Ziffer 14 Schriftzeichen hat und damit die Buchstabensumme von b+a+c+h repräsentiert, - dies übrigens in schöner Übereinstimmung zu der Anzahl von 13 CONTRAPUNCTI und 1 FUGA im Zyklus. Und wer Spaß an solchen Zahlenbetrachtungen hat, dem wird zudem nicht entgehen, dass die *eine* Ziffer eine 3 ist und somit auf den drei-einigen Gott der christlichen Theologie verweist.

Die FUGA ist daraufhin zu untersuchen, ob sie trotz ihrer „Unvollkommenheit“ Symmetrien in sich selbst aufweist, und welche Beziehungen zum Gesamtwerk bestehen.

Die drei Themen der FUGA:

Das Thema des ersten Teils der FUGA hat 7 Töne und ist achsensymmetrisch. Es erklingt im ersten Teil der FUGA 24 mal (18 mal regulär, 5 mal gespiegelt, 1 mal halb gespiegelt/halb regulär).



Der zweite Teil bringt sein in Achteln fließendes Thema mit 41 Tönen 8 mal. In seinem Verlauf gibt es dazu fünf Einsätze von Thema 1.



Im dritten Teil wird als Thema die Tonfolge b-a-c-h auf 10 Töne erweitert.



In den letzten sieben Takten der FUGA werden die drei Themen zum ersten und ein einzigen Mal kombiniert. Danach bricht das Werk ab.

Die letzten Abschnitte der FUGA sind klar proportioniert: Nach harmonisch geradezu abenteuerlichen Ereignissen in den Takten 224 und 225 folgen noch insgesamt 14 Takte, und zwar zunächst 7 Takte, in denen das b-a-c-h-Thema ein letztes Mal allein erklingt, bis nach einem Zwischenspiel die Zusammenführung der drei Themen in den letzten 7 Takten erfolgt.

Im letzten Takt (239) erklingt ab „1+“ einstimmig ein Motiv aus 7 Achteln.



Dieses 7-tönige Achtel-Motiv ist entwickelt aus dem zweiten Thema der FUGA. Siehe die Klammer oben im Notenbeispiel „Thema 2“. Es wird mehr und mehr aus dem Thema herausgelöst, häufig sequenziert und ein einziges Mal sogar gleichzeitig mit seiner Spiegelung zitiert (Takt 191).



Von diesem Takt an (einschließlich) bis zum Ende des Werkes sind es $49 = 7 \cdot 7$ Takte. Diese Anzahl von Takten steht zu den 79 Takten des CONTRAPUNCTUS 6 („Ouverture“) im Verhältnis des Goldenen Schnittes.

Das 2. Thema der FUGA, aus welchem die sieben Töne stammen, hat insgesamt 41 Töne. Das 7-tönige Achtel-Motiv wiederum erscheint im zweiten Teil der

FUGA 41 mal, teils als Bestandteil des Themas, teils herausgelöst als selbständiges Motiv.

Im letzten Takt allerdings wird es zum 42. Mal gespielt. Bemerkenswerterweise wird das 2. Thema für seinen letzten Einsatz (in der Kombination mit den beiden anderen Themen) durch Voranstellen eines Achtels auf 42 Töne erweitert (Takt 233). Und damit dieses vorangestellte zusätzliche Achtel auch wirklich als zum Thema gehörig mitgezählt wird, ist davor eine Pause! Das aus dem 2. Fugenthema herausgelöste 7-tönige Achtel-Motiv wird also genau so oft zitiert, wie das 2. Fugenthema Töne enthält. Sollte die FUGA eine Quadrupelfuge werden, hätte sie mehr Einsätze auch des 2. Themas, und als dessen Bestandteil würde das 7-tönige Achtelmotiv häufiger erklingen. Wenn die Übereinstimmung der Anzahl von Tönen im 2. Thema mit der Anzahl von Wiederholungen des 7-tönigen Achtelmotives bei einer Ergänzung der FUGA erhalten werden sollte (was wir natürlich nur vermuten können), müsste das 2. Thema mehr und mehr um weitere Achtel verlängert werden.

Nur wenn die FUGA *nicht* zu einer Quadrupelfuge ergänzt wird, ist der Fall möglich, dass das aus ihrem zweiten Thema entwickelte 7-tönige Achtelmotiv genau so oft zitiert wird wie dieses Thema Töne hat.

Diese Sachlage ist unabhängig davon, ob und welche außermusikalischen Bedeutungen bestimmten Zahlen zugeordnet werden. Trotzdem sollen hier einige wichtige und übliche Zuordnungen kurz erwähnt werden.

Die Zahl 41 wird gern als Symbol für den Namen des Komponisten gesehen ($J+S+B+A+C+H = 9+18+2+1+3+8 = 41$) wie auch 14 ($B+A+C+H = 2+1+3+8$) und 29 ($J+S+B = 9+18+2$). Gleichzeitig verweisen diese Zahlen jedoch auch auf Jesus (41. Generation nach Abraham¹⁴), auf David (hebräisch $14 = \text{יד}$), und auf „Soli Deo Gloria“ ($S+D+G = 18+4+7 = 29$).

DAS HAUPTTHEMA IN DER FUGA

Das 7-tönige Achtelmotiv ist zwar Bestandteil des 2. Themas der FUGA, doch wächst es aus diesem quasi heraus. Im letzten Takt wird das 7-tönige Motiv nicht als Fortführung des zweiten Themas zitiert wie in den ersten Einsätzen des Themas, - das wäre im Alt -, sondern hier wird es im Tenor an das b-a-c-h-Thema angehängt, wie im Autograph zu sehen ist (siehe Abbildung oben).

¹⁴ Matthäus 1, 17

So banal diese kleine Motiv auf den ersten Blick erscheint, muss man doch feststellen, dass sieben Achtel in genau dieser Gestalt ausgesprochen selten in der gesamten Komposition vorkommen. Ich finde es außerhalb der FUGA in CONTRAPUNCTUS 8 von Takt 9 auf 10. Darüberhinaus gibt es vor allem in CONTRAPUNCTUS 1 und CONTRAPUNCTUS 4 einige Stellen, an denen es jedoch so sehr verkürzt vorkommt, dass es zwar noch identifizierbar ist, aber wohl zu sehr reduziert, um es als solches zu bewerten.

Das 7-Achtel-Motiv kann als ein Fragment des Hauptthemas der KUNST DER FUGE gelesen werden. Es zitiert das Hauptthema spiegelsymmetrisch verkürzt.



Beachtenswert ist auch der Vergleich der synchronen Spiegelung des 7-Achtel-Motivs am Ende des zweiten Teils der FUGA (Takt 191, s. o.) mit der synchronen Spiegelung in CONTRAPUNCTUS 5, also am Ende der ersten Gruppe, vor der Französischen Ouverture. Beides kommt in dieser Gestalt nur je einmal vor.



Dieser Vergleich unterstreicht die Verwandtschaft zwischen dem 7-Achtel-Motiv und dem Hauptthema.

Festzustellen ist diese Symmetrie: **Die KUNST DER FUGE beginnt einstimmig mit dem Hauptthema. Die FUGA bzw. das Fragment der KUNST DER FUGE endet einstimmig mit dem rückwärts gespielten Fragment des Hauptthemas. Die KUNST DER FUGE beginnt mit d' und endet mit d'.**

Was zu einem vollständigen Zitat des Hauptthemas zu fehlen scheint, sind die ersten und die letzten Töne. Aber auch sie sind vorhanden.

Schon viele haben eine Verwandtschaft zwischen dem ersten Eigenthema der FUGA und dem Hauptthema des Zyklus vermutet. Ich sehe in den ersten vier Tönen des Eigenthemas der FUGA tatsächlich ein genaues Zitat aus dem Hauptthema; die erste Hälfte ist Note für Note identisch mit dem Beginn des Hauptthemas, und zwar in dessen Gestalt mit punktierten Durchgangsnoten, wie sie ab CONTRAPUNCTUS 3 oft verwendet wird. Die zweite Hälfte ist die Wiederholung im Krebsgang.



Das 7-tönige Teilzitat des Hauptthemas wird in der FUGA folgendermaßen zur Vollständigkeit ergänzt: Die Töne vier bis sieben erklingen transponiert im Krebs im siebentönigen Achtermotiv (s. o.). Die restlichen Töne stehen am Ende des letzten Einsatzes des b-a-c-h-Themas, natürlich auch im Krebs, bzw. im Hauptthema am Anfang der FUGA. Anfang und Ende werden verklammert. Der Kreis schließt sich.

Die Zeilen des folgenden Notenbeispiels zeigen den Übergang vom dritten Eigenthema der FUGA zum Hauptthema am Ende der FUGA. Aus den drei Eigenthemen der FUGA wächst das Hauptthema der KUNST DER FUGE heraus.

Man kann also durchaus sagen: **Das Hauptthema ist in der FUGA vollständig enthalten:** Thema 1 zitiert die ersten drei Töne (in der Gestalt mit Durchgangsnoten) und deren Krebs. Die weiteren Töne des Hauptthemas sind in einem Ausschnitt von 7 Achteln in Thema 2 enthalten, wiederum im Krebs. Die letzten Töne entsprechen den letzten drei Tönen von Thema 3, ebenfalls im Krebs. Die FUGA hat zwar nur 3 Themen, ganz, wie der Titel „FUGA A 3 SOGGETTI“ sagt, und dennoch wird das Hauptthema der KUNST DER FUGE präsentiert. Ein einziges Mal erklingt es vollständig, und zwar rückläufig und so transponiert, dass die FUGA mit demselben Ton d' endet, mit welchem die KUNST DER FUGE in CONTRAPUNCTUS 1 beginnt. Der Kopf des Hauptthemas, der am Ende der FUGA fehlt, steht an ihrem Anfang. Somit sind Anfang und Ende der FUGA und gleichfalls Anfang und Ende des gesamten Zyklus auf höchst unkonventionelle Weise verbunden und spiegelsymmetrisch aufeinander bezogen.

SPIEGELSYMMETRIEN

Für solch mehr oder weniger versteckte Spiegelsymmetrien lassen sich weitere Beispiele innerhalb der FUGA bzw. zwischen FUGA und den ersten CONTRAPUNCTIN finden.

Blicken wir auf den Goldenen Schnitt der FUGA: Er teilt ihre Taktzahl 239 auf in 147 und 92. Zur Erinnerung: 147 ist auch der Durchmesser eines Kreises mit dem Umfang der Taktanzahl der ersten Gruppe von Einzelstücken (CONTRAPUNCTUS 1 - 5).

Wenn man **147 Takte** vom Ende an rückwärts zählt, gelangt man in die Mitte eines melodischen Gebildes, welches fast ähnlich wie eine Sinuskurve eine Kreisbewegung in zeitlichem Verlauf abbildet. Es ist eine Umgestaltung des ersten Themas. Dieses beginnt in der gespiegelten Fassung und erklingt ab dem mittleren Ton regulär.



Auch wenn wir den Goldenen Schnitt, den Takt 147, vom Beginn der FUGA an zählen, finden wir eine kleine Besonderheit:

Dort erklingen die ersten drei Töne des Hauptthemas rückläufig in Achteln, durch die folgende Pause klar abgegrenzt. Unmittelbar davor steht das 7-tönige Achtelmotiv, wobei die beiden kleinen Motive hier nicht „richtig“ verbunden sind. In genau dieser Gestalt gibt es diese Konstellation nur an dieser Stelle. Es findet sich direkt vor dem ersten kombinierten Einsatz von erstem und zweitem Thema.



Dass die Zahl 147 der Buchstabenwert ist von „Komm, Herr Jesu“¹⁵, ist im Hinblick auf die weiter unten ausgeführten Betrachtungen zur Zahl 18 („J. J.“ = „Jesu Juva“ = „Jesu, hilf“) durchaus interessant.

Innerhalb der FUGA zeigt die Platzierung von ungewöhnlichen kleinen musikalischen Figuren, die in genau der vorliegenden Gestalt jeweils nur ein einziges Mal vorkommen, - die eine im Takt 147 von vorne, die andere im Takt 147 von hinten gezählt -, eine vermutlich bewusst kalkulierte Symmetrie zwischen vorne und hinten. Ähnliches sehen wir im Bezug auf den Gesamtzyklus. Tatsächlich findet sich auch, vom Beginn der KUNST DER FUGE an gezählt, im Takt 147 etwas, das in seiner speziellen Form an das oben gezeigte in sich punktgespiegelte, quasi in sich verdrehte Thema 1 der FUGA erinnert. Der 147. Takt von vorne an gezählt liegt in CONTRAPUNCTUS 2 (CONTRAPUNCTUS 1 hat nur 78 Takte). Es ist in Cp 2 der 69. Takt. Auch dort befindet sich ein Themeneinsatz, der in seiner Mitte die Gestalt ändert. Er beginnt synkopisch und ist vom mittleren Ton an wieder im normalen Rhythmus. Solche

¹⁵ Pachlatko S. 325

Unregelmäßigkeiten werden in der Komposition nur dort eingesetzt, wo der Komponist etwas besonderes ausdrücken oder mitteilen möchte.

Weitere achsensymmetrisch zwischen Anfang und Ende des Zyklus angeordnete Besonderheiten sind zu finden in Takt 26/27 und Takt 48/49, jeweils einmal von ganz vorne und einmal von ganz hinten gezählt. Es handelt sich auch dort um Themenzitate, die eine ungewöhnliche Gestalt haben oder an einem gänzlich unerwarteten Platz stehen.

Takt 26/27

von vorne: (in Cp 1) das b-a-c-h im Krebs (Tenor, Beginn auf „2“)

von hinten (= FUGA Takt 213/214): Im Sopran ein Fragment des ersten Themas der FUGA (beginnend in Takt 211)¹⁶ und gleichzeitig im Alt zum ersten Mal das b-a-c-h-Thema in seiner Spiegelung.

Takt 48/49

von vorne: Zitat des ersten Themas aus der FUGA (!), und zwar in Engführung zwischen Alt und Tenor in unterschiedlichen Notenwerten, in Takt 48 auf „1“ gleichzeitig beginnend.

von hinten: Abschluss von Teil 2 der FUGA. Gespiegelte Dopplung des siebentönigen Fragments des Hauptthemas (s. o.).

DIE ZAHL 239

Nachdem bis hierhin einige Zahlen als Maßzahlen betrachtet worden sind, ist nun die Zahl 239 mit ihren besonderen Eigenschaften zu untersuchen. Auch ist zu fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass der Komponist rein zufällig bei dieser Taktzahl aufgehört haben könnte zu schreiben.

Die FUGA hat 239 Takte.

Die Quersumme ist $2+3+9 = 14 =$ „Bach“ oder „David“ (דוד). Dies allein hat wenig Aussagekraft für die Fragestellung, ob es Absicht sein kann, dass die FUGA ausgerechnet im Takt 239 abbricht, denn es gibt sehr viele Taktzahlen mit der Quersumme 14. Jedoch bieten die Ziffern 2 und 3 und 9 weitere interessante Möglichkeiten.

¹⁶ Die Überbindung im Sopran von Takt 48 auf 49 fehlt im Originaldruck, ist im Autograph vorhanden.

Indem man zwei der Ziffern zu einer Zahl zusammenfasst, ergibt sich als Quersumme auch $2+39 = 41 =$ „J. S. Bach“ oder die Anzahl der Generationen von Abraham bis Jesus¹⁷.

Die Ziffern von 14 und 41 entsprechen sich spiegelbildlich. Damit spielen sie auf eine zentrale kompositorische Technik der KUNST DER FUGE an, nämlich auf das Prinzip der Spiegelung.

Das Querprodukt ist $2*3*9 = 54$. Dies ist das Dreifache von 18 (Anzahl der Einzelstücke).

Bemerkenswert ist auf jeden Fall, dass die Zahl 239 die kleinstmögliche Zahl überhaupt ist, die gleichzeitig mit ihren Quersummen und ihrem Querprodukt auf die Anzahl der Stücke des Zyklus, auf Jesus, auf David, den König und Musiker im alten Israel, und auf den Namen des Komponisten sowie auf eine für die KUNST DER FUGE zentrale Kompositionstechnik, nämlich die Spiegelung, hinweist.

Erst bei größeren Zahlen kommt dieses Zusammentreffen noch einige Male vor; im Bereich bis 400 gibt es weitere sechs solcher Zahlen. Die erste davon hat 90 Takte Abstand von der 239.

Die Wahrscheinlichkeit, dass Bach die Zahl 239 als Taktmenge für Cp 14 rein zufällig „getroffen“ habe, ist unter diesem Gesichtspunkt nicht unmöglich, aber doch sehr gering.

Mit dem Hinweis auf die beiden Namenszahlen und die Spiegelsymmetrie enthält die Zahl 239 die selben „Bedeutungen“ wie die drei Themen der FUGA.

Das erste Thema hat eine spiegelsymmetrische Tonfolge.

Das zweite verweist mit der Anzahl seiner Töne auf die 41.

Das dritte weist mit den Tönen b-a-c-h auf die Zahl 14.

In der Zahl des letzten Taktes, oder anders ausgedrückt: in der Anzahl der Takte der FUGA spiegeln sich gewissermaßen ihre drei Themen wider.

Die Zahl 239 ist innerhalb des Zyklus auch in anderen Zusammenhängen zu finden. Einige Kombinationen von zwei oder mehreren Einzelstücken ergeben eine Taktsumme von 239, zum Beispiel:

CONTRAPUNCTUS 6 + CANON DECIMA + CANON DUODECIMA: $79+82+78 = 239$. Der Cp 6 leitet im Stil einer Französischen Ouverture die zweite Gruppe der KUNST DER FUGE ein, die bis zum Ende reicht. Diese Ouverture ist zusammen mit den beiden für

¹⁷ Matthäus 1, 17

den Erstdruck neu hinzukomponierten Kanons Duodecima und Decima exakt so lang wie die FUGA.

CONTRAPUNCTUS 9 + CANON AUGM.: $130+109 = 239$.

DER TITEL DES ZYKLUS

Die genaue Formulierung des Titels ist beachtenswert. Im Autograph steht „KUNST DER FUGA“ (mit „a“), im Erstdruck „KUNST DER FUGE“ (mit „e“). Beide Titel sind von fremder Hand angebracht. Unter der Annahme, dass der Titel dennoch authentisch ist, lohnt sich die Untersuchung der Anzahl der Wörter und der Buchstaben sowie der Buchstabenwerte ($a=1$, $b=2$, $c=3$, usw.). Wenn der letzte Buchstabe ein „a“ ist, beträgt der Buchstabenwert des Titels 140. Wenn er jedoch ein „e“ ist, 144. Mit der Zahl 140 lässt sich leicht zehn mal 14 assoziieren. Spannender scheint mir aber die Zahl 144.

$144 = 12 \cdot 12$.

144 ist die 12. Zahl in der Fibonacci-Folge (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144). Diese Zahlenfolge spielt eine große Rolle bei der Planung von Strukturen.

Der Titel hat 12 Buchstaben.

Das Hauptthema hat in seiner Originalgestalt 12 Töne.

Ein symbolischer Bezug zur Vision des Himmlischen Jerusalem im letzten Teil der Bibel (Offenbarung 21, 10 ff.) liegt nahe.

$144 = 18 \cdot 8$.

Die Zahl 18 benennt die Anzahl der Einzelstücke der KUNST DER FUGE.

18 steht für „J. J.“ ($= 9+9$) = „Jesu juva“ („Jesus, hilf“), das Bach gern Partituren voranstellte; zu sehen z. B. vor den 18 Sätzen der sechs Orgelsonaten und vor den 18 Chorälen der Leipziger Sammlung.

Wegen dieser Assoziationsmöglichkeiten möchte ich dem Buchstabenwert 144 den Vorzug gegenüber der 140 geben und damit unter den beiden Versionen des Titels derjenigen mit „e“.

Im Rückblick auf die oben beschriebene Aufteilung des Zyklus in zwei Gruppen mit 5 beziehungsweise 13 Einzelstücken fällt auf, dass zwar weder die erste (462) noch die zweite Gruppe (1500) eine Taktmenge hat, die durch die Anzahl 18 der Einzelstücke teilbar ist, während hingegen beide Gruppen zusammen eine durch 18 teilbare Taktzahl haben: $1962 = 18 \cdot 109$. Dies bedeutet:

Wenn die FUGA genau mit ihrem 239. Takt endet, steht die Anzahl der Takte des Gesamtwerkes (1962) in einem ganzzahligen Verhältnis zur Anzahl der Einzelstücke (18).

Der Gesamtzahl von 1962 Takten könnte man einen Schönheitsfehler zuschreiben. Die dem Titel als Buchstabenwert zugeordnete Zahl 144 ist durch 18 und durch 12 teilbar. Die Zahl 1962 jedoch nur durch 18, nicht aber durch 12. Es ist daher zu prüfen, welche Zahlen bei einer hypothetischen „Vervollständigung“, also Verlängerung der FUGA zu finden sind, die sowohl durch 18 als auch durch 12 teilbar sind und in einer realistischen Größenordnung liegen. In Frage kommen 2016 und 2088.

2016 ist teilbar durch 12 und 18. Sie ist sogar durch 144 teilbar: $144 \cdot 14 = 2016$. Der entsprechende Schlusstakt der FUGA hätte dann die Nummer 293. Wie in 239 lassen sich das Querprodukt $54 = 3 \cdot 18$ und die Quersumme 14 bilden, jedoch nicht die Quersumme 41.

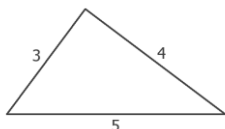
2088 ist teilbar durch 12 und 18 sowie durch 72, allerdings nicht durch 144. Schön ist die Tatsache, dass 2088 das Produkt aus 29 (!) und 72 ist. Der Schlusstakt der FUGA hätte dann die Nummer 365 mit beiden Quersummen 14 und 41 und dem Querprodukt $90 = 5 \cdot 18$. In diesem Fall müsste die FUGA um 126 Takte erweitert werden. Ein Plus wäre zu vermerken bezüglich der Lage des Goldenen Schnittes. Er würde an einer absolut herausragenden Stelle liegen, nämlich genau dort, wo in der FUGA die Auflösung der außergewöhnlichen Dissonanzen von Takt 224 und 225 beginnt. Schön auch, dass die Länge der FUGA in diesem Fall der Anzahl von Tagen im Jahr entspräche.

Beide Möglichkeiten sehen zunächst sehr gut aus, aber in beiden Fällen wären die weiter oben beschriebenen Symmetrien hinfällig.

PYTHAGOREISCHE TRIPEL

Nach den Betrachtungen über die Beziehung zwischen dem Buchstabenwert des Titels und der Zahl der Takte der KUNST DER FUGE führt der Weg weiter über einen ganz anderen Sachverhalt, den Wolfgang Wiemer aufgezeigt hat¹⁸.

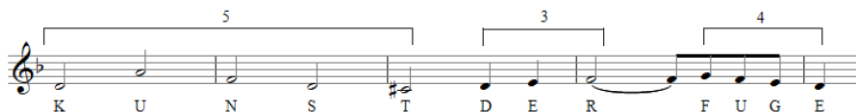
Die drei Wörter „Kunst“, „der“ und „Fuge“ haben 5, 3 und 4 Buchstaben. Das entspricht den Seitenlängen eines Pythagoreischen Dreiecks¹⁹.



Die Formulierung des Titels aus drei Wörtern mit 5, 3 und 4 Buchstaben kann als Reverenz gegenüber Lorenz Christoph Mizler de Kolof und seine Correspondierende Societät der musicalischen Wissenschaften zu sehen sein. Diese Gesellschaft forderte von ihren Mitgliedern, zu denen Johann Sebastian Bach zählte, das Bekenntnis zu pythagoreischem Gedankengut, zur Philosophie der Aufklärung, wie sie von Gottfried Wilhelm Leibniz und Christian Wolff gelehrt wurde. Dazu gehörte ein Musikverständnis, das die Musik als Wissenschaft sieht, als Ausdruck einer Harmonie der Welt, das die mathematischen Aspekte der Musik hochhält.

Die Tatsache, dass die drei Wörter des Titels ein Pythagoreisches Tripel bilden, erhält insbesondere dann eine nicht zu unterschätzende Bedeutung, wenn die Verhältnisse von drei zu vier zu fünf nicht nur im Titel, sondern auch in der Architektur der Musik nachzuweisen sind.

Da ist erstens das Hauptthema. Wolfgang Wiemer schlägt vor, es gemäß dem Pythagoreischen Tripel aufzuteilen.



¹⁸ Wiemer, S. 127

¹⁹ Die Zahlen 3-4-5 bilden das kleinste und bekannteste Pythagoreische Tripel. Die folgenden Absätze beziehen sich nur auf solche Tripel, deren Zahlen im selben Verhältnis zueinander stehen wie 3 zu 4 zu 5.

Vor allem im Hinblick auf spätere Gestalten des Themas, etwa in CONTRAPUNCTUS 8 und 11, erscheint es mir allerdings angemessener, die Aufteilung umzukehren. Dann ist die Gliederung 4 - 3 - 5.

Bei der Suche nach weiteren Pythagoreischen Tripeln im gleichen Verhältnis in der Komposition, in der Struktur von Einzelstücken oder in Zusammenfassungen unterschiedlicher Gruppierungen muss mit größeren Zahlen gearbeitet werden. Die Summe des Pythagoreischen Tripels 3+4+5 ist 12. Daraus ergibt sich, dass jede Zahl, die durch 12 teilbar ist, auf die drei Seiten eines Dreiecks, das die gleichen Seitenverhältnisse wie 3:4:5 hat, ganzzahlig verteilt werden kann. Die Taktmengen einiger Einzelstücke und mehrerer Gruppierungen stellen ein Vielfaches von 12 dar. Aber nicht alle lassen sich in musikalisch sinnvoller Aufteilung darstellen. Folgende fünf Fälle halte ich für beachtenswert. Die beiden letzten sind relevant für die vorliegende Arbeit, da sie die Länge der FUGA mit anderen Einzelstücken in Beziehung setzen.

CONTRAPUNCTUS 3

CONTRAPUNCTUS 8 + 10 + 11

CONTRAPUNCTUS 4 + 5 bis 7 + 11

alle Stücke ab CONTRAPUNCTUS 6 bis einschließlich FUGA

CONTRAPUNCTUS 7 + FUGA

Die Tripel sind wie folgt zu beschreiben:

CONTRAPUNCTUS 3

18 Takte Exposition mit 4 Themeneinsätzen,

24 Takte Zwischenspiele mit einem markanten Bassmotiv (welches später in CONTRAPUNCTUS 11 wiederholt wird); 3 synkopische Themeneinsätze,

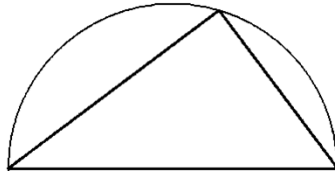
30 Takte, ohne das Bassmotiv; 5 Themeneinsätze (drei regulär und zwei variiert).

Sogar in doppelter Weise kann Cp 3 als Pythagoreisches Tripel dargestellt werden:

Die Taktzahlen der drei Abschnitte stehen im Verhältnis 3:4:5,

die Anzahl der Themeneinsätze in den drei Abschnitten beträgt 4, 3, 5.

CONTRAPUNCTUS 3 lässt sich also als pythagoreisches Dreieck mit den Seitenlängen 18, 24 und 30 darstellen. Der Thaleskreis über diesem Dreieck²⁰ hat die Bogenlänge 47,12 und entspricht damit sehr genau der Taktzahl des dritten Teils der FUGA (47). Diese Relation wäre nicht gegeben, wenn die FUGA nicht mit ihrem 239. Takt enden würde.



CONTRAPUNCTI 8, 10 und 11

bilden zusammen ein thematisch eng miteinander verknüpftes Gebilde. Es handelt sich um die beiden Tripelfugen (Cp 8 und 11) und die dazwischen platzierte zweite Doppelfuge. Die Symmetrie innerhalb dieser Gruppe wird durch die Möglichkeit, die Taktmengen Stücke in sinnvoller Unterteilung im Verhältnis 3 zu 4 zu 5 abzubilden, bestätigt.

Die enge Beziehung zwischen Cp 8, Cp 10, Cp 11 soll hier nur kurz angedeutet werden.

Das Eigenthema des CONTRAPUNCTUS 10 zeichnet sich vor allem durch die Spiegelsymmetrie der ersten beiden Takte aus. Die drei Viertel im ersten Takt entsprechen den ersten drei Tönen im zweiten Thema des CONTRAPUNCTUS 11. Die drei Viertel im zweiten Takt den ersten drei Tönen in CONTRAPUNCTUS 8.



²⁰ Über jedem rechtwinkligen Dreieck lässt sich ein solcher Halbkreis bilden mit der längsten Seite des Dreiecks als Durchmesser. Im vorliegenden Fall beträgt der Durchmesser 30, der Radius 15. Der Halbkreis hat also den Umfang $15 \times \pi = 47,12$.

In späteren Einsätzen (Takt 66, 75 und 115) stimmen sogar die Tonstufen überein:



CONTRAPUNCTUS 10 verklammert in seinem Eigenthema die beiden Tripelfugen CONTRAPUNCTUS 8 und 10.

Die Gruppe Cp 8, 10, 11 hat zusammen $492 = 12 \cdot 41$ (!) Takte. Für die Darstellung als Pythagoreisches Tripel (123 - 164 - 205) wird jeder dieser CONTRAPUNCTI in zwei Abschnitte unterteilt, jeweils an einer Stelle, die musikalisch eine sinnvolle Gliederung erlaubt.

123: Cp 8, T. 1-123 (danach beginnt die Zusammenführung der drei Themen)

205: Cp 11 ganz plus Cp 10, T. 1-21 (das ist der für den Druck hinzugefügte Eingangsteil)

164: Cp 10 ab T. 22 plus Cp 8 ab T. 124

Die Zusammenstellung dieser drei CONTRAPUNCTI wird weiter unten noch eine wesentliche Rolle spielen (s. Seite 64).

CONTRAPUNCTUS 4 bis 7 plus CONTRAPUNCTUS 11

138: Cp 4 (das ist der CONTRAPUNCTUS, der nachträglich hinzugefügt wurde)

230: Cp 5 + 6 + 7 (das ist der Block der drei Gegenfugen)

184: Cp 11 (die monumentale, hochdramatische Tripelfuge)

CONTRAPUNCTUS 6 (Französische Ouverture) bis einschließlich FUGA

375: Cp 8 + CANONAUGM + CANONDUODEC

500: Cp 6 + Cp 7 + Cp 9 + Cp 12+13 + CANON ALLA OTTAVA

625: Cp 10 + Cp 11 + CANONDEC + FUGA

Bemerkenswert ist, dass die größte Zahl dieses Tripels, die 625, auch bei den oben gezeigten Kreisberechnungen eine Rolle spielt. Sie entspricht dem Durchmesser eines Kreises mit dem Umfang 1962, also der Gesamtlänge des Zyklus.

CONTRAPUNCTUS 7 und FUGA

Diese beiden Stücke haben zusammen $239+61 = 300$ Takte. Das entsprechende Tripel ist 75 - 100 - 125. Folgende Aufteilung der Abschnitte beider Stücke ist denkbar:

100: FUGA, T. 1-100 (Takt 101 wird musikalisch durch einen singulären Tritonusvorhalt im Sopran hervorgehoben)

125: FUGA, T. 101-225 (in T. 225 ist die harmonisch extremste Stelle der ganzen KUNST DER FUGE)

75: FUGA, die letzten 14 Takte (ab T. 226) plus CONTRAPUNCTUS 7

Diese Zuordnung passt und ist plausibel. CONTRAPUNCTUS 7 bildet den Abschluss der Fugen mit nur einem einzigen Thema, die FUGA den Abschluss des Gesamtwerkes. In der Möglichkeit, die Taktmengen dieser beiden Fugen auf einem Pythagoräischen Dreieck exakt und in sinnvoller Unterteilung abzubilden, sehe ich ein weiteres Indiz für die Planmäßigkeit des Abschlusses der FUGA in Takt 239.

Die FUGA für sich allein kann nicht auf einem Pythagoreischen Dreieck abgebildet werden, denn die Taktmenge 239 ist eine Primzahl und als solche natürlich auch nicht durch 12 teilbar.

Könnte es sein, dass die FUGA, wenn sie auf eine hypothetische Vervollständigung erweitert wird, für sich allein in drei Abschnitten plausibel einem Pythagoreischen Dreieck zugeordnet werden kann? Die Länge der FUGA müsste durch 12 teilbar

sein, die drei zu findenden Abschnitte durch 3 bzw. 4 bzw. 5. Die drei Zahlen müssten dabei klar definierten Abschnitten in der FUGA entsprechen.

Erste Möglichkeit:

Dasselbe Zahlentripel wie bei der Kombination von FUGA und CONTRAPUNCTUS 7, also 75 - 100 - 125. Gesamtzahl 300. Die Zahlen 100 und 125 würden wie dort zugeordnet, die Zahl 75 wiederum dem letzten Teil ab Takt 226, mit einer Ergänzung um 61 Takte. Das halte ich für vorstellbar. Allerdings treffen die oben für die Zahl 239 beschriebenen Eigenschaften (Quersummen etc.) auf die Zahl 300 nicht zu. Auch die resultierende Gesamtlänge des Zyklus (2023) wäre eine Zahl, die nicht die gleichen Eigenschaften hat wie die reale Zahl 1962, denn sie ist weder durch 12 noch durch 18 teilbar, noch könnten die Quersummen 14 und 41 gebildet werden.

Andere Möglichkeiten:

Als Ausgangspunkt für die Einteilung einer verlängerten FUGA bietet sich die Länge ihres ersten Teils an. Er hat 114 Takte²¹. Die Zahl 114 ist nicht durch 4, nicht durch 5, aber durch 3 teilbar ($114 : 3 = 38$); sie muss daher als die kleinste der drei Zahlen im Tripel (gemäß 3 - 4 - 5) fungieren. Daraus errechnet sich das Tripel 114 - 152 - 190. Die daraus resultierende Gesamtlänge der FUGA wäre 456, eine Zahl, die insofern besticht, als sie der unteren Zahlenreihe auf der Mizlerschen Medaille (siehe Seite 27) entspricht. Unklar ist jedoch, welchen Abschnitten die Zahlen 152 und 190 zugeordnet werden sollten. Sie passen nicht zu den komponierten Abschnitten der FUGA. Die Gesamtlänge des Zyklus käme auf 2179, was wiederum eine Zahl wäre, die hinsichtlich der oben beschriebenen Überlegungen zur Gesamtzahl geradezu enttäuschend wirkt. Als Primzahl ist sie weder durch 12 noch durch 18 teilbar. Die Quersummen 14 oder 41 sind nicht vorhanden.

Alternativ können wir den zweiten Teil der FUGA als Ausgangspunkt der Berechnung des Tripels nehmen. Die Anzahl seiner Takte stellt sich unterschiedlich dar, je nachdem, wie man die Takte an seinen beiden Enden zuordnet, denn vorn überlappen sich Teil 1 und Teil 2, hinten Teil 2 und Teil 3. Bei der Zählung auf 80 Takte ergeben sich zwei Varianten für die Berechnung: Wenn wir 80 als Vielfaches von 4 einsetzen, ist es die mittlere Zahl des Tripels, die beiden anderen sind dann 60 und 100. Für die Taktmenge der FUGA ergibt sich 200. Sie hätte in diesem Fall also weniger Takte als real vorliegend. Wenn wir 80 als Vielfaches von 5 einsetzen, käme die FUGA sogar nur auf $48 + 64 + 80 = 192$ Takte. Wenn wir für den zweiten Teil hingegen nur 78 Takte zählen, haben wir eine durch 3 teilbare Zahl; das Tripel ist dann 78 - 104 - 130, die Summe 312. Hier sehe ich

²¹ Im Takt 114 überlagern sich erster und zweiter Teil der FUGA. Einerseits beginnt in diesem Takt bereits der zweite Teil, so dass der erste Teil *ohne* den Einsatz des zweiten Themas nur 113 Takte hat, andererseits endet der erste Teil erst in Takt 115.

jedoch keine Möglichkeit für eine adäquate Zuordnung der Zahlen 104 und 130. Die Gesamtzahl des Zyklus wäre 2035 und würde nicht besser passen als die im vorausgehenden Absatz genannte Zahl 2179.

Rechnerisch scheint keine überzeugende Erweiterung der FUGA möglich, die es erlauben würde, ihre Abschnitte als Pythagoreisches Tripel darzustellen.

Nicht nur die FUGA als Einzelstück, sondern auch der Zyklus in seiner Gesamtheit lässt sich mit der real vorliegenden Taktmenge *nicht* als Pythagoreisches Tripel darstellen, denn die Gesamtzahl von 1962 Takten ist nicht durch 12 teilbar. Möglich wird es, wenn man den CANONDECIMA oder den CONTRAPUNCTUS 4 oder CONTRAPUNCTUS 5 weglässt. Aber dies erscheint sinnlos.

Auch in Bezug auf den gesamten Zyklus ist die Situation zu prüfen, wenn die FUGA „vollendet“, also länger wäre. Mit den oben errechneten möglichen Gesamtzahlen für den Zyklus (siehe Seite 17) ergeben sich z. B. folgende Pythagoreische Tripel, die sämtliche Einzelstücke abbilden.

2016

504: Cp 1, 2, 9, CANONAUGM, CANONOTT, FUGA

672: Cp 4, 5, 6, 7, 10, 11

840: Cp 3, 8, 12, 13, 14, CANONDEC, CANONDUODEC.

2088

522: Cp 2, 8, 9, 10

696: Cp 3, 4, 5, 11, CANONAUGM, CANONOTT.

870: Cp 1, 6, 7, 12, 13, CANONDEC, CANONDUODEC, FUGA

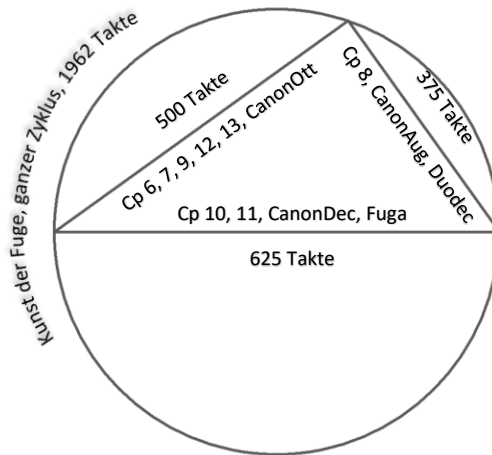
Die oben beschriebenen Symmetrien wären allerdings hinfällig.

Auch der ansonsten wunderschöne von Rechtsteiner vorgeschlagene achsensymmetrische „Idealplan“ der KUNST DER FUGE erlaubt keine Darstellung des Gesamtwerkes als Pythagoreisches Tripel; dort werden $2 \cdot 1111$ Takte für den kompletten Zyklus angenommen.²²

Dennoch zeigt die Tatsache, dass es möglich ist, einige wesentliche Proportionen der KUNST DER FUGE im Verhältnis von Pythagoreischen Tripeln darzustellen, dass der Zyklus mit 1962 Takten bzw. die FUGA mit 239 Takten als in sich harmonisch strukturiert zu sehen ist.

²² Rechtsteiner, S. 61

Relevant für die Fragestellung der vorliegenden Arbeit ist insbesondere das Tripel, welches aus den Stücken der zweiten Gruppe mit insgesamt 1500 Takten gebildet werden kann, also von Cp 6 bis FUGA. Als rechtwinkliges Dreieck dargestellt beträgt die längste Seite (Hypotenuse) 625. Dies ist der Durchmesser eines Kreises (Thaleskreis) mit dem Umfang 1962. Somit besteht ein geometrisches Verhältnis zwischen der Länge des ganzen Zyklus und der Länge des zweiten Teils. Jede Verlängerung der FUGA im Sinne einer Vervollständigung würde dieses perfekte Verhältnis zerstören.



Was geschieht, wenn die FUGA verlängert wird, sagen wir: um einen Betrag x ?

Der Durchmesser des Kreises, der die Länge der FUGA enthält, würde um x verlängert, also würde der Kreisumfang um $3,14 \cdot x$ verlängert. Dieser Betrag enthält den Verlängerungsbetrag x der FUGA, denn die FUGA wird auch im Umfang abgebildet; d. h. $2,14 \cdot x$ müssen über die Verlängerung der FUGA hinaus ergänzt werden. Hierfür wurde ein Lösungsvorschlag schon auf Seite 4 beschrieben. Dort war für x der Betrag 24 eingesetzt.

Zusätzlich müssen die Bedingungen des Pythagoreischen Dreiecks erfüllt werden. Die FUGA ist als Bestandteil der längsten Seite enthalten. Für die Seiten des Dreiecks soll das Verhältnis 3:4:5 beibehalten werden. Um Zuordnungen zu Einzelstücken und Gruppen in ganzen Takten vornehmen zu können, kommen nur ganzzahlige Tripel in Frage. Wenn die FUGA um eine Zahl x erweitert wird, müssen wegen der Bedingungen im Tripel die beiden anderen Dreiecksseiten um $3/5 \cdot x$ bzw. um $4/5 \cdot x$ verlängert werden. Wir benötigen für die passende Verlängerung

dieser Dreiecksseiten bisher nicht mitgezähltes Material aus dem Erstdruck von $7/5 \times x = 1,4 \times x$ Takten. Für die Verlängerung des Kreisumfangs benötigen wir $2,14 \times x$ Takte, also zusätzlich zu den $1,4 \times x$ Takten weitere $0,74 \times x$ Takte. Zur Verfügung stehen die von mir bisher nicht mitgezählten Varianten und Spiegelungen der CONTRAPUNCTI 10, 12, 13 und der CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“:

Cp 10, kurze, ursprüngliche Version (Erstdruck S. 45)	98 Takte
CHORAL	45 Takte
Spiegelfugen Cp 12 und 13 doppelt gezählt, zusätzlich	127 Takte
Varianten mit Basstimme zu Cp 13, zusammen weitere	2*71 Takte

Maximal stehen damit 412 Takte zur Verfügung, um die zur Verlängerung der FUGA um x Takte errechnete zusätzliche Verlängerung um $2,14 \times x$ Takte auf dem Kreisumfang abzudecken. Da das Verhältnis zwischen Kreis und Dreieck festliegt, gilt: Um die beiden kürzeren Dreiecksseiten im richtigen Verhältnis zu verlängern, stehen maximal $412/2,14 \times 1,4 = 270$ Takte zur Verfügung. Die Verlängerungen der beiden kürzeren Seiten müssen im Verhältnis 3:4 stehen. Ihre Summe darf 270 nicht übersteigen. Lässt sich dies erreichen mit den genannten fünf Zahlen 98, 45, 127, 71, 71? Unterteilungen dieser Zahlen sollten möglichst nicht vorgenommen werden, denn sie müssten unbedingt musikalischen Strukturen entsprechen; unter Umständen jedoch wären Unterteilungen in Cp 10 und im CHORAL möglich.

Cp 10 könnte unterteilt werden in $21+12+19+10+22+14$ Takte, der CHORAL in $11+11+10+13$ Takte.

Die Taktzahl für die Verlängerung der kürzesten Dreiecksseite muss durch drei teilbar sein. Das ist der Fall

- a) beim CHORAL (45),
- b) wenn man die Kurzform von Cp 10 zusammenfasst mit den Varianten der dreistimmigen Spiegelfuge ($98+71+71=240=3 \times 80$),
- c) mit der Extrazählung der gespiegelten Cp 12 und 13 ($98+127=225=3 \times 75$).

Die Verlängerungen der mittleren und der längsten Seite müssen dazu im Verhältnis 4:3 bzw. 5:3 stehen. Bei der längsten Seite muss die Ergänzung der FUGA eingerechnet werden. Hieraus folgt für die Verlängerungen der drei Seiten:

- a) um 45, 60, 75 Takte. Die 60 kann nicht dargestellt werden.

b) um 240, 320, 400 Takte. Für die gesamte Länge der kürzeren Seiten stehen nicht genügend Takte zur Verfügung. Das Maximum ist 412.

c) um 225, 300, 375 Takte. Wie bei b) mehr Takte erforderlich als vorhanden.

In keinem Fall sehe ich eine Möglichkeit, die Beträge aus den zur Verfügung stehenden Stücken abzudecken.

Angenommen, die erforderlichen Verlängerungen der kürzeren Dreiecksseiten sollten mit passenden Unterteilungen aus den in Frage kommenden Stücken vorgenommen werden. Dann müsste ein betreffendes Stück im Verhältnis 3:4 geteilt werden. Rein rechnerisch ist das möglich bei der Kurzform von Cp 10. Die Unterteilung wäre nach Takt 42 oder 56 vorzunehmen. Aber dies würde nicht zur musikalischen Struktur dieses Stückes passen.

Weiterhin wäre denkbar, vom CHORAL die erste und die letzte Verszeile für die kürzeste Seite zu nehmen (24 Takte), die dritte Zeile des CHORALS (10 Takte) und den fünften von sechs Abschnitten (22 Takte) aus der Kurzform von Cp 10 für die mittlere Seite zusammenzufassen (32 Takte); der Rest beider Stücke (87 Takte) müsste auf der längsten Seite untergebracht werden, gemeinsam mit der Verlängerung der FUGA. Doch gemäß den Regeln für das Dreieck darf die längste Seite hier nur um 40 Takte erweitert werden.

Meines Erachtens ist eine Erweiterung der FUGA unmöglich, wenn die zahlenmäßigen Verhältnisse von Kreis und Dreieck, wie ich sie aus der Platzierung des „in Stylo Francese“ und aus dem Zahlentripel des Titels abgeleitet und geometrisch dargestellt habe, beibehalten werden sollen. Auch dann nicht, wenn bisher nicht mitgezählte Stücke des Erstdruckes eingerechnet werden.

Die geometrische Darstellung auf Seite 31 ist zwar in sich stimmig und lässt keine Verlängerung der Fuga zu. Aber in der Zuordnung der Einzelstücke zu den Seiten des Dreiecks lässt sich keine einleuchtende Systematik erkennen. Sie erscheint willkürlich gewählt mit dem Zweck passender Zahlen. Dass hier alles passt, kann durchaus Zufall sein. Die Befunde unter dem Gesichtspunkt Tripel können nicht als Beweis dafür herhalten, das Werk müsste absichtsvoll so geplant sein.

DER GOLDENE SCHNITT

Der Goldene Schnitt teilt eine Zahl so in zwei Teile, dass sich der größere zum kleineren Teil genau so verhält wie die gesamte Zahl zum größeren Teil.

- 1.) Gemessen an der **Anzahl der Einzelstücke** der KUNST DER FUGE ist folgendes festzustellen²³:

Bezogen auf die Anzahl der 13 CONTRAPUNCTI liegt der Goldene Schnitt bei CONTRAPUNCTUS 8; die Zahlen 8 und 13 sind Bestandteil der Fibonacci-Folge.²⁴

Bezogen auf die Anzahl sämtlicher 18 Einzelstücke des Zyklus liegt der Goldene Schnitt bei CONTRAPUNCTUS 11; die Zahlen 11 und 18 sind Bestandteil der algebraischen Folge 3-4-7-11-18-29-47-usw. Bemerkenswert erscheint, dass auch die Zahlen 29 (Buchstabenwert von JSB oder SDG) und 47 (Taktzahl des dritten Teils der FUGA) in eben dieser Folge enthalten sind.

- 2.) Gemessen an der **Anzahl der Takte** des Zyklus liegt der Goldene Schnitt bei 1212 für den größeren Teil und bei 750 für den kleineren Teil. Im Notentext finden wir genau nach den ersten 750 Takten eine besondere Stelle. Es ist der Takt 148 in CONTRAPUNCTUS 8. Dort werden zum ersten Mal dessen drei Themen gleichzeitig gespielt. Von dort also sind es bis zum Ende des Zyklus, dem letzten Takt der FUGA, 1212 Takte. Das Verhältnis von 750 zu 1212 ist dasselbe wie das Verhältnis von 1212 zu 1962, der Taktzahl des gesamten Werkes. Die Platzierung des Goldenen Schnittes nach Takten in CONTRAPUNCTUS 8 halte ich nicht für aufschlussreich in Bezug auf weitere Überlegungen zur Gesamtstruktur des Zyklus. Jedoch wird die Zahl 1212 später noch einmal aufgegriffen.

- 3.) Durchaus interessant ist, dass es zwischen einigen **Einzelstücken Längenverhältnisse** gibt, die sehr genau dem Goldenen Schnitt entsprechen²⁵:

CONTRAPUNCTUS 5 (90 Takte, erste Fuge, in welcher das Thema und seine Umkehrung = Spiegelung gleichzeitig erklingen) zu
CONTRAPUNCTUS 12 (56 Takte, vierstimmige Spiegelfuge)

²³ Wenn der Goldene Schnitt mit ganzen Zahlen im niedrigen Bereich angegeben werden soll, ist dies nie genau, sondern wird gerundet.

²⁴ Siehe S. 42

²⁵ Siehe hierzu auch S. 49

FUGA Teil 1 (115 Takte) zu
CONTRAPUNCTUS 13 (71 Takte, dreistimmige Spiegelfuge)

CONTRAPUNCTUS 11 (184 Takte, Tripelfuge) zu
FUGA Teil 1 (115 Takte)

CP 12 + CP 13 (127 Takte, beide Spiegelfugen) zu
FUGA Teil 2 (78 Takte)

4.) **FUGA Teil 3** (47 Takte) hat als Goldenen Schnitt die Zahl 29, die üblicherweise in der Gematrie JSB (Johann Sebastian Bach) oder SDG (Soli Deo Gloria) zugeordnet wird.

DIE ZAHL 18

Für einen großen Teil der bisherigen Ausführungen spielte insbesondere die Zahl 12, also die Anzahl der Töne des Hauptthemas in seiner Urgestalt und die Anzahl der Buchstaben des Titels, eine Rolle.

Im folgenden wird die Bedeutung der Zahl 18, also der Anzahl der Einzelstücke, ausführlich behandelt.

- Die 18 Einzelstücke der KUNST DER FUGE haben nach der oben beschriebenen Zählweise eine Gesamtlänge von 1962 Takten. Die Zahlen 18 und 1962 stehen in zweifacher Weise miteinander in direkter Beziehung: 1962 hat die Quersumme 18 und ist ein Vielfaches von 18.
- $1962 = 18 \cdot 109$ ist das Produkt aus der Taktmenge des CANON PER AUGMENTATIONEM (109) und der Anzahl der Einzelstücke. Unter diesem Blickwinkel bekommt die Überschrift des CANON PER AUGM. einen doppelten Sinn. „Per Augmentationem“ bezeichnet dann nicht nur die „Vergrößerung“ der Notenwerte in diesem Kanon, sondern auch die „Vergrößerung“ der Taktmenge durch die Multiplikation mit der Anzahl der Einzelstücke auf die Gesamtmenge aller Takte. Die Taktmenge dieses Kanons ist übrigens nicht nur irgendeine Zahl, die ins rechnerische Konzept passt, sondern sie steht in der Reihe der

Primzahlen an neunundzwanzigster Stelle und spielt somit an auf: $29 = 18+4+7 = S+D+G$ (Soli Deo Gloria) und $29 = 9+18+2 = J+S+B$.

- Die Zahl 18 begegnet weiterhin auf vielerlei Weise in der KUNST DER FUGE. Einige Beispiele liste ich hier auf:
- Das Hauptthema erklingt in seiner unveränderten Originalgestalt, also weder gespiegelt noch rhythmisch oder melodisch variiert, ohne Durchgangsnoten insgesamt 18 mal, nämlich 11 mal in CONTRAPUNCTUS 1 und 7 mal in CONTRAPUNCTUS 9.
- Der Titel hat den Buchstabenwert 144. Das ist nicht nur $12*12$, siehe oben auf Seite 16, sondern es ist auch $8*18$.
- Querprodukt der Taktmenge der FUGA 239 ist $2*3*9 = 54 = 3*18$
- In Teil 1 der FUGA gibt es 18 reguläre Themeneinsätze (weitere Einsätze sind gespiegelt).
- $41*18$ ist die Taktsumme von beiden Spiegelfugen, allen Kanons und der FUGA.
- Das Thema von Cp 13 hat eine Länge von 18 Viertelschlägen.
- CONTRAPUNCTUS 3 hat $4*18$ Takte.
- CONTRAPUNCTUS 5, 6 und 7, die drei Gegenfugen, sind die einzigen Stücke im Zyklus mit zusätzlichen Stimmen in ihren Schlusstakten²⁶. Ihre Schlussakkorde haben 6 bzw. 7 bzw. 5, also zusammen 18 Töne.
- 18 ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang der Taktmenge von CONTRAPUNCTUS 12 entspricht. Und das Spiegelfugenpaar CONTRAPUNCTUS 12 hat zusammen 18 Themeneinsätze.
- Es gibt drei Gruppen zu jeweils insgesamt 372 Takten; es sind erstens die vier ersten CONTRAPUNCTI, zweitens die beiden Tripelfugen CONTRAPUNCTI 8 und 11, drittens die vier CANONES. In der Summe sind es 1116 Takte = 62×18 .

Bei der Suche nach einem Grund, die Zahl 18 so vielfältig strukturbildend zu verwenden, gibt insbesondere der Blick auf die Leipziger Handschrift mit den Orgelsonaten und den Chorälen eine Antwort. Diese große, nahezu komplett von Johann Sebastian selbst geschriebene Sammlung älterer und neuerer Werke für Orgel²⁷ entstand ungefähr in den gleichen Jahren wie die KUNST DER

²⁶ Bis auf eine Sopranverdopplung nur im vorletzten Takt von CONTRAPUNCTUS 11

²⁷ Siehe dazu meine Arbeit über das Leipziger Orgelbuch:

[https://imslp.org/wiki/J._S._Bachs_Leipziger_Orgelbuch_\(Kleber%2C_Wolfgang\)](https://imslp.org/wiki/J._S._Bachs_Leipziger_Orgelbuch_(Kleber%2C_Wolfgang))

FUGE. Sie enthält eine Gruppe mit sechs Sonaten zu je drei Sätzen, also 18 Einzelstücken, und eine Gruppe mit 18 Chorälen, die jeweils mit „J. S. Bach“ signiert sind (die fünf Kanons über „Vom Himmel hoch“ sind nur *ein* Mal signiert, zählen daher nur als ein Stück) und dazu, von fremder Hand eingetragen und ohne Signatur (daher nicht mitzuzählen!), der CHORAL „Vor deinen Thron tret ich“, identisch bis auf wenige Details mit dem CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“, der der KUNST DER FUGE hinzugefügt wurde.

Bemerkenswert ist die Formulierung „Achtzehn noch ungedruckte Choralvorspiele.....“ auf dem Titelblatt der Orgelhandschrift. Das Wort „ungedruckte“ ist unterstrichen; und dies ist interessant im Zusammenhang mit der KUNST DER FUGE. „Vor deinen Thron“ ist nämlich der 19. Choral in der Orgelsammlung. Bei Fertigstellung der Handschrift war dieser Choral also offenbar bereits gedruckt bzw. für den Druck vorbereitet! Nämlich, wenn auch mit anderem Titel, am Ende der KUNST DER FUGE. Das bestätigt den Verdacht, dass die Druckplatten für die FUGA A 3 SOGGETTI und für den CHORAL bereits relativ frühzeitig erstellt wurden. Und deshalb heißt es auf dem Deckblatt der Orgelhandschrift „Achtzehn ungedruckte.....“ und nicht *Neunzehn* ungedruckte.....“

Die Parallelität zwischen der Orgelhandschrift und der KUNST DER FUGE ist auffällig: Bei beiden handelt es sich um 18 Kompositionen mit einem zusätzlichen Choral.

Auch im CHORAL selbst spielt die Zahl 18 eine Rolle an herausragender Stelle: Die letzte melodische Linie hat in Alt und Tenor zusammen 18 Töne, in der zusätzlichen Bassstimme weitere 18 Töne.



In der Leipziger Orgelhandschrift steht über dem Beginn der 1. Sonate und über dem ersten der Choräle „J. J.“ = „Jesu juva“ („Jesus, hilf!“)²⁸. Der Buchstabenwert von J+J ist 9+9 = 18.

Hat die Zahl 18 auch in der KUNST DER FUGE die Bedeutung „Jesus, hilf!“ - auch wenn Bach das „J. J.“ nicht hingeschrieben hat?

Möglicherweise hilft der Blick auf einen kleinen Kanon weiter, den Bach in ein Gästebuch schrieb.²⁹ Er ist im melodisch harmonischen Ausdruck und in seinen Proportionen eng verwandt mit CONTRAPUNCTUS 3.

Canone doppio sopr' il Soggetto

Canone 1

Canone 2

Soggetto

Symbolum
Christus Coronabit Crucigeros

Domino Possessori
hisce notulis commen-
dare se volebat
J. S. Bach

Lipsiae d. 15. Octobr: 1747

Dieser kleine Rätselkanon (BWV 1077) ist mit einer Widmung und einem Motto versehen: „Symbolum Christus Coronabit Crucigeros“ („ein Symbol dafür, dass Christus die Kreuztragenden krönen wird“). Wie Lutz Felbick ganz sicher zutreffend darüber schreibt, ist dieser Gästebucheintrag als ein persönliches Bekenntnis Bachs zu verstehen³⁰.

Jede der vier Kanonstimmen hat 18 Töne, der Basso continuo 8 Töne. In der ausgeschriebenen Form haben die Kanonstimmen zusammen 4*18=72 Töne. Das sind genau soviele Töne wie 3. CONTRAPUNCTUS Takte hat.

Aufgrund der Verwandtschaft zwischen dem Rätselkanon und CONTRAPUNCTUS 3 sollte man das von Bach dem Kanon hinzugefügte Motto im Blick behalten, wenn es um eine Deutung der KUNST DER FUGE geht. „Symbolum Christus Coronabit Crucigeros“. Man denke unter anderem an das dritte Thema der FUGA mit dem Kreuzmotiv am Beginn und dem sich anschließenden Aufstieg.

²⁸ Das „J. J.“ hat Bach auch in die Partituren seiner Johannes-Passion und der H-Moll-Messe geschrieben

²⁹ Neue Bach Ausgabe, Abdruck der Noten nach

[https://imslp.org/wiki/Canon_in_G_major,_BWV_1077_\(Bach,_Johann_Sebastian\)](https://imslp.org/wiki/Canon_in_G_major,_BWV_1077_(Bach,_Johann_Sebastian))

³⁰ Felbick, S. 439

Auch in jüdischer Tradition spielt die 18 eine Rolle. Sie ist als eine Glückszahl zu sehen, 18 = 'n = leben. Und sie erinnert an das wichtige „Achtzehngebet“. Warum sollte Bach nicht auch dies assoziiert haben?

Johann Sebastian Bach hatte in Lüneburg nicht nur Latein- und Griechischunterricht, sondern es wurde auch Hebräisch³¹ angeboten. Ob Bach dieses Angebot nutzte, wissen wir nicht. Die jüdische Bibel (das „Alte Testament“) kannte er jedenfalls - in der Lutherübersetzung - gut. David, der Musiker und König des alten Israel, war für Bach ein berühmtes Vorbild. Viel Kontakt zu jüdischem Leben hatte er vermutlich nicht. In Leipzig könnte er zu Zeiten der Messen jedoch durchaus Gelegenheit dazu gehabt haben. Es gab zwar keine jüdische Gemeinde, und in Leipzig galten schikanierende Vorschriften für Juden. Doch zu den Messen kamen jüdische Kaufleute und mit ihnen auch jüdische Musiker, und sie feierten während der Michaelismesse das Laubhüttenfest.³²

Für Mizler hatte die „Musik der Hebräer“ einen hohen Stellenwert:

„Und vor Pythagora [...] war die Musik unter den Griechen nicht bekannt [...] Dagegen war die Musik schon vor mehr als 400 Jahren bey den Juden zur Vollkommenheit gebracht, von welchen sie ohne Zweifel die benachbarten Völker, also die Chaldäer lerneten. Selbst Pythagoras lernetete sie hier, als ein Stück ihrer Weisheit“³³. Es ist nicht auszuschließen, dass Bach bei der Zahl 18 auch jüdische Traditionen im Blick hatte.

³¹ Martin Petzold, „Ut probus & doctus reddar“, Zum Anteil der Theologie bei der Schulausbildung Johann Sebastian Bachs in Eisenach, Ohrdruf und Lüneburg“, S. 11, online bei <https://www.google.com>

³² Nora Pester, Jüdisches Leipzig, Hentrich&Hentrich, 2022, <https://www.hentrichhentrich.de>

³³ Felbick S. 96

DIE SINGULÄRE TRIOLE

Es wirkt fast wie Zauberei: In zwei Rechenschritten lässt sich die genaue Anzahl der Takte der KUNST DER FUGE aus der Anzahl der Töne des Hauptthemas oder aus der Anzahl der Buchstaben des Titels ableiten. Hierfür ist die Platzierung der singulären Triole in CONTRAPUNCTUS 11 von zentraler Bedeutung. Dies muss zuerst erörtert werden.

Eine einzige Achteltriole gibt es in dem monumentalen Cp 11. Sie wurde erst für die Druckfassung eingefügt. Sie wirkt völlig organisch, doch kann ich keine musikalische Notwendigkeit erkennen, weswegen Bach dort nachträglich eine Triole einfügte; im Autograph gibt es sie nicht. Ein Grund könnte sein, dass sie eine bestimmte strukturelle Position kennzeichnen soll. Die singuläre Triole steht exponiert im Takt 101 des Cp 11 im Sopran und gibt diesem Takt ein besonderes Gewicht.



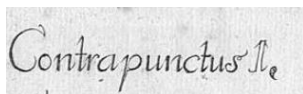
Auch darf man wohl annehmen, dass diese Triole eine symbolische Bedeutung hat. Auf kleinstem Raum zeichnet diese Figur einen Kranz, eine Krone, und in den drei folgenden Takten durchmisst der Tenor in nur neun Tönen die enorme Weite von einer Duodezime zuerst abwärts und sofort wieder aufwärts.

Jesus Christus Heiland für die ganze Welt (101 = Buchstabenwert von „Salvator“ - „Heiland“); die kleine Figur der Triole erinnert an „Christus coronabit (wird krönen) crucigeros“, das Motto des erwähnten Rätselkanons.

Die weitgespannte Figur in der Tenorstimme symbolisiert die ganze Welt.

Die Spanne der Tenorstimme verweist zweimal auf die Anzahl der 12 Töne des Hauptthemas. Sie umfasst ab- und aufwärts jeweils einen Abstand von 12 diatonischen Schritten.

An dieser Stelle möchte ich auf die ungewöhnliche Gestaltung der Ziffer „1“ im Erstdruck der KUNST DER FUGE hinweisen. Hier die Überschrift des CONTRAPUNCTUS 1 im Erstdruck:



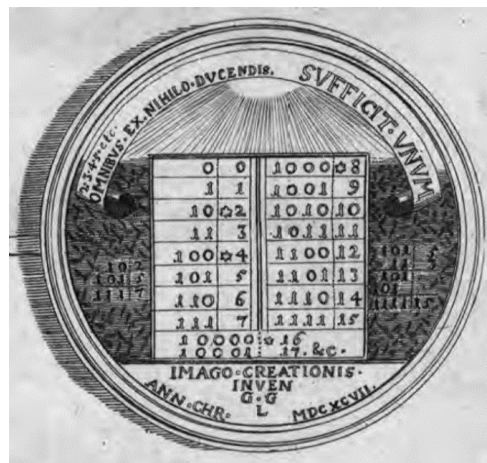
Die „1“ wird durch zwei senkrechte Striche mit einem Dach darüber dargestellt.

Mit Handschriftvergleichen wurde nachgewiesen, dass die betreffende Druckplatte von Bach selbst gestaltet wurde³⁴. Das heißt, die Gestaltung der „1“ wurde vom Komponisten gewählt.

Eine solche „1“ finden wir auf einer Medaille der Mizlerschen Gesellschaft.³⁵



Wir dürfen wohl in dieser speziellen „1“ eine Reverenz gegenüber der Mizlerschen Gesellschaft und insbesondere gegenüber Leibniz sehen. Denn dieser hat genau solche Einsen auf seiner Darstellung des dualen Zahlensystems verwendet.

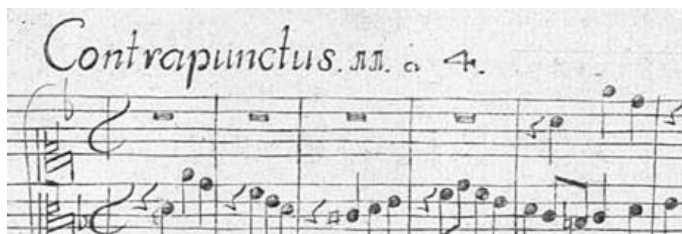


Der von Leibniz entworfene Kupferstich trägt die lateinische Überschrift „omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum“ („um alles aus dem Nichts herzuleiten genügt Eines“). Leibniz selbst interpretierte sein duales Zahlensystem im Sinne der Schöpfung: Aus dem Nichts (also der Null) und Gottes Wort (also der Eins) sei die gesamte Welt entstanden.

³⁴ Rechtsteiner, Seite 9

³⁵ Felbick, Seite 5

Auch in der Überschrift des CONTRAPUNCTUS 11 sehen wir die spezielle Gestaltung der Ziffer 1.



Es scheint mir angebracht, versuchsweise die „11“ als duale Zahl zu lesen. Dann ist es eine Drei. Die musikalische Entsprechung hierzu ist die hier verwendete Variante des Hauptthemas: Dreimal drei Noten nach einer Pause: Aus dem Nichts (= Pause) und dem Wort des Dreieinigen Gottes (drei Viertelnoten) ist alles entstanden.

Nicht nur mit der Gestaltung der „11“ im Titel des CONTRAPUNCTUS 11 dürfte Bach auf das von Leibniz propagierte duale Zahlensystem anspielen. Auch die erwähnte singuläre Achteltriole tut dies. Dort lässt sich folgendes Zahlenspiel durchführen: Die Ziffernfolge von „Cp 11, Takt 101“ ist „11101“. Wenn man sie als duale Zahl liest und ins Dezimalsystem umrechnet, ist es eine 29, die Zahl mit dem Buchstabenwert für SDG oder JSB.

Die Zahl 101, die durch die singuläre Triole markiert wird, hat Bedeutung für die Proportion des Gesamtzyklus. Dies sehe ich auch bestätigt durch ein weiteres ungewöhnliches Detail in der Komposition: Auch in der FUGA finden wir etwas ähnlich ungewöhnliches im Takt 101. Exponiert steht dort im Sopran ein singulärer Tritonusvorhalt, der nach unten aufgelöst wird.

Wenn wir 12, also die Anzahl der Töne des Hauptthemas oder der Buchstaben des Titels „KUNST DER FUGE“, mit 101 multiplizieren, erhalten wir 1212. Diese Zahl entspricht sehr genau dem Goldenen Schnitt der gesamten Taktmenge des Zyklus. Auf dem exaktesten Berechnungsweg³⁶ erzielt man aus der Teilanzahl 1212 für die Gesamtanzahl den Wert von 1961,06. Genauer getroffen wird die reale Gesamtzahl 1962, wenn man zur Berechnung den einfacheren Weg über ein Zahlenpaar aus der Fibonacci-Folge³⁷ nimmt, wie

³⁶ $1212 / (\text{WURZEL}(5) - 1) * 2 = 1961,06$

³⁷ 1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - usw.

Bach es vermutlich getan hat. Die Zahlen der Fibonacci-Folge nähern sich ziemlich genau dem Verhältnis des Goldenen Schnitts an, je höhere Paare von aufeinanderfolgenden Zahlen der Fibonacci-Folge man nimmt. So ist etwa das Verhältnis 5 : 8 näher am Verhältnis des Goldenen Schnittes als 3 : 5. Und 8 : 13 ist wiederum genauer als 5 : 8. Wir nehmen für die Berechnung das Zahlenpaar 21 : 34³⁸ und stellen fest:

Aus der Anzahl (12) der Töne des Hauptthemas oder der Buchstaben des Titels lässt sich mit Hilfe der Platzierung der singulären Triole (101) in zwei einfachen Rechenschritten die Gesamtzahl (1962) der Takte der KUNST DER FUGE errechnen:

1.) 12, die Anzahl der Töne des Hauptthemas oder der Buchstaben des Titels wird mit 101 (Takt mit der singulären Triole in Cp 11) multipliziert. Ergebnis: 1212.

2.) 1212 wird als Goldener Schnitt der Gesamtzahl der Takte angenommen. Um diese Gesamtzahl zu errechnen, wird 1212 mit 34/21 multipliziert. Ergebnis: 1962.

Einen anderen Blick auf den Takt 101 in CONTRAPUNCTUS 11 bekommen wir, wenn wir alle Takte von Beginn des Zyklus an zählen. Dann steht die Triole im 1141. Takt. Das heißt, vor der Triole sind es 1140 Takte. Und dies ist genau die zehnfache Länge des ersten Teiles der FUGA.³⁹

Der zweite Teil der FUGA ist übrigens genauso lang wie CONTRAPUNCTUS 1. Die Länge des dritten Teils der FUGA beträgt exakt ein Viertel von CONTRAPUNCTUS 8.

Die reale Länge der KUNST DER FUGE mit 1962 Takten wird durch die Zahl 1212 im Verhältnis des Goldenen Schnittes geteilt; die Zahl 1212 ist das 101-fache der Anzahl der Töne des Hauptthemas; der Takt 101 im elften CONTRAPUNCTUS ist markiert durch eine singuläre Triole. Dieser verblüffende rechnerische Zusammenhang zwischen Hauptthema bzw. Titel und Länge des Zyklus hat mich veranlasst, in dieser Richtung weiter zu denken.

³⁸ $1212 * 34 / 21 = 1962,29$

³⁹ Zur Bestimmung der Taktzahl des Teils der FUGA siehe Fußnote Seite 28

FIBONACCI-FOLGE

Um den Goldenen Schnitt zu berechnen, habe ich nicht mit der modernen Wurzelformel gearbeitet, sondern mit einem Zahlenpaar aus der Fibonacci-Folge. Die Zahlen 1212 und 1962 sind allerdings selbst nicht Bestandteil der Fibonacci-Folge. Doch sie stehen im selben Verhältnis zueinander wie jeweils zwei aufeinander folgende Zahlen der Fibonacci-Folge. Die Fibonacci-Folge funktioniert so, dass jede größere Zahl die Summe aus den beiden vorausgehenden kleineren Zahlen ist. Also: $2=1+1$; $3=1+2$; $5=3+2$; $8=5+3$ usw., oder umgekehrt: $34-21=13$; $21-13=8$; $13-8=5$; $8-5=3$.

Nun entwickeln wir nach dem gleichen Prinzip eine Folge, welche die Zahlen 1212 und 1962 enthält; dabei gehen wir rückwärts von größeren zu kleineren Zahlen vor:

$$1962 - 1212 = 750$$

$$1212 - 750 = 462$$

$$462 - 288 = 174$$

$$288 - 174 = 114$$

$$174 - 114 = 60$$

Und eben diese Zahlen stellen die Taktzahlen einiger Gruppierungen in der KUNST DER FUGE dar. Alle Einzelstücke sind in diesen Gruppierungen enthalten, manche doppelt (CANONAUGM. und FUGA); die Doppelung halte ich nicht für relevant, denn entscheidend ist, dass es überhaupt Gruppierungen gibt, deren Taktsummen mit den gefundenen Zahlen übereinstimmen. Hier die Zuordnung:

- 60 Produkt der drei Zahlen des Tripels 5, 3, 4 („Kunst“, „der“, „Fuge“)
- 114 FUGA (Teil 1)
- 174 Spiegelfugen (CP 12 + 13) + FUGA (Teil 3)
- 288 CP 11 (nur bis zur Triole in Takt 101) + CANONAUGM. + FUGA (Teil 2)
- 462 CONTRAPUNCTI 1 bis 5
- 750 Hälfte der durch „in Stylo Francese“ definierten Gruppe, Aufteilung:
CP 6 + 7 + 11 + 12 + 13 + CANONOTT + CANONDEC + FUGA Teil 1
bzw. CP 8 + 9 + 10 + CANONAUG + CANONDUODEC + FUGA Teil 2 + 3

1212 Produkt aus 12 (Buchstabenzahl des Titels oder Anzahl der Töne des Hauptthemas) und 101 (Taktzahl der singulären Triole in CONTRAPUNCTUS 11 oder des singulären Tritonusvorhalts in der FUGA)

1962 Gesamtzyklus

Ausgangspunkt für diese Berechnung waren die großen Zahlen 1212 und 1962. Es lässt sich die selbe Zahlenfolge auch umgekehrt entwickeln. Den Anfang bilden dann das Pythagoreische Tripel 3, 4, 5 und die Taktzahl des ersten Teils der FUGA. Beginnend mit den Zahlen 60 und 114 bilden wir eine algebraische Zahlenfolge nach dem Modell der Fibonacci-Folge und erreichen die Gesamttaktzahl 1962.

$$114 + 60 = 174$$

$$174 + 114 = 288$$

$$288 + 174 = 462$$

$$462 + 288 = 750$$

$$750 + 462 = 1212$$

$$1212 + 750 = 1962$$

Die Gesamtmenge der Takte kann durch Addition exakt und einfach errechnet werden, ausgehend vom ersten Teil der FUGA und dem Pythagoreischen Tripel aus Hauptthema bzw. Titel.

Eine Fortsetzung der Zahlenfolge zum Zweck einer in dieser Weise rechnerisch konsequenten „Vervollständigung“ würde den Zyklus auf insgesamt $1962 + 1212 = 3174$ Takte bringen. Für die FUGA würde das eine stolze Taktmenge von 1451 bedeuten. Das scheint allerdings abwegig.

DIE ZAHL 15

Die mathematischen Argumente möchte ich ergänzen durch eine spekulative Interpretation des letzten Taktes.

Der letzte Takt enthält auf der „1“ einen Dreiklang und im Anschluss daran das einstimmige 7-tönige Motiv, das, wie oben ausgeführt, als Fragment des Hauptthemas gesehen werden kann. Insgesamt gibt es in diesem letzten Takt also zehn Töne. Die letzten vier Töne können von rechts nach links als Andeutung des Tetragramms für den hebräischen Gottesnamen gelesen werden, und zwar auf folgende Weise:

Das „d“ am Ende der KUNST DER FUGE ist der zehnte Ton in diesem Takt. Die Zahl Zehn wird im Hebräischen mit dem Buchstaben י (Jod) geschrieben. Die beiden Achtel „h“ stehen für den Buchstaben ה (He). Das sechste Achtel im Takt steht für ו (Waw) die hebräische Sechs. Somit wäre mit den letzten vier Tönen der Name Gottes, der in der jüdischen Tradition nicht ausgesprochen wird, auf versteckte Weise repräsentiert.



Hinzu kommt: Die hebräische Kurzform des Namens Gottes (יה) hat den Zahlenwert **15**. Hat Bach vielleicht deshalb den **15.**-letzten Takt mit einem Intervall gekennzeichnet, das nur an dieser einen Stelle vorkommt? Es ist die verminderte Sexte. Sie wird sogar besonders hervorgehoben durch ihre Überbindung von einem in den nächsten Takt. Derselbe Takt ist von vorne gezählt der 225. Takt der FUGA. 225 ist $15 \cdot 15$.

Im dritten Teil der FUGA gibt es **15** Themeneinsätze:

2 mal Thema 1: einmal regulär in Takt 234 und einmal ab Takt 211 in sich „verdreht“, ähnlich wie in Takt 90;

1 mal Thema 2;

12 mal Thema 3.

15 ist der Durchmesser eines Kreises, dessen Umfang der Länge des dritten Teils der FUGA entspricht.⁴⁰

Ferner ist **15** auch die Differenz der Taktmengen der Spiegelfugen (56 bzw. 71).

Das Hundertfache von **15** ist die Anzahl der Takte der zweiten Gruppe des Zyklus von CONTRAPUNCTUS 6 bis zum Ende.

15 Einzelkompositionen haben im Titel das Wort CONTRAPUNCTUS bzw. CONTRAPUNTO.

15 ist die Anzahl der Töne der synkopischen Themanvariante in Cp 3.

Offenbar kommt neben den Zahlen 12 und 18 auch der Zahl 15 eine Bedeutung für die Struktur der KUNST DER FUGE zu.

In diesem Zusammenhang lohnt der Blick auf die auf Seite 41 abgebildete Medaille der Mizlerschen Gesellschaft. Die oberen Zahlen 1, 2, 3 können als Verweis auf das trinitarische Gottesverständnis gelesen werden. Die Summe der unteren Zahlenreihe 4+5+6 ist 15. Jeweils mit 3 multipliziert ergeben sich die Zahlen 12, 15, 18 sowie als Summe 45. Somit liegt auch eine zahlenmäßige, eine strukturelle Beziehung zum CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“ vor! Er hat 45 Takte.⁴¹

15 ist der deutsche Buchstabenwert von „A“ und „O“ (A=1, O=14).⁴² Am Ende der FUGA wird das 7-tönige Teilzitat des Hauptthemas zur Vollständigkeit ergänzt: Die Töne vier bis sieben erklingen transponiert im Krebs im siebentönigen Achtermotiv; von den restlichen Tönen stehen drei am Ende des letzten Einsatzes des b-a-c-h-Themas, natürlich auch im Krebs, drei am Anfang der FUGA. Anfang und Ende werden verbunden. Der Zyklus endet, wie er begonnen hat. „A“ und „O“, also der erste (α) und der letzte Buchstabe (ω) im griechischen Alphabet, beziehen sich auf den Vers „Ich bin das Alpha und das Omega, der Erste und der Letzte, der Anfang und das Ende“ aus dem letzten Buch der Bibel (Offenbarung 22,13). Nach deutscher Zählung ist der Buchstabenwert 15. Wenige Verse später endet der Bibeltext mit den Worten: „Es spricht, der dies bezeugt: Ja, ich komme bald. – Amen, komm, Herr Jesu!

⁴⁰ $47/\pi=14,97$

⁴¹ Der CHORAL „Wenn wir in höchsten Nöten“ hat 3*15 Takte. Und sein alternativer Text „Vor deinen Thron tret ich“ hat 15 Strophen. Vielleicht ist die Überschrift im Erstdruck ein Irrtum und der CHORAL hätte auch hier wie in der Leipziger Orgelhandschrift „Vor deinen Thron tret ich“ heißen sollen. Siehe meine Abhandlung J. S. Bachs Leipziger Orgelbuch, www.imslp.org

⁴² Nach altgriechischer Zählung sind die Buchstabenwerte jedoch $\alpha=1$ und $\omega=24$

Die Gnade des Herrn Jesus sei mit allen!“ Zur Erinnerung: „Komm, Herr Jesu“ hat den Buchstabenwert 147, die Zahl, welche die FUGA A 3 SOGGETTI im Goldenen Schnitt teilt.

DREIMAL 372

Wie Rechtsteiner⁴³ und Corten⁴⁴ dargestellt haben, lassen sich mehrere Einzelkompositionen der KUNST DER FUGE zu Gruppen zu jeweils 372 Takten zusammenfassen. Corten nennt drei Gruppen, Rechtsteiner postuliert für einen hypothetischen „Idealplan“ des Zyklus hingegen vier Gruppen zu 372 Takten, zwischen denen kleinere Gruppen mit unterschiedlichen Taktzahlen stehen.

Die drei real vorliegenden Gruppen zu je 372 Takten, die von Corten und Rechtsteiner genannt werden, sind die CONTRAPUNCTI 1 bis 4, die CONTRAPUNCTI 8 und 11 sowie die vier CANONES. Nach Rechtsteiners Hypothese hätte die FUGA A 3 SOGGETTI auf ebenfalls 372 Takte „vervollständigt“ werden sollen und als eine Quadrupelfuge den Namen CONTRAPUNCTUS 14 erhalten. Auf diese Weise hätte der gesamte Zyklus eine axialsymmetrische Großform von zwei spiegelbildlich proportionierten Hälften zu je 1111 Takten. Dieser „Idealplan“ ist durchaus bestechend, doch er geht von der tradierten Annahme aus, dass erstens die FUGA A 3 SOGGETTI eine Quadrupelfuge hätte werden sollen, und zwar in dieser Hypothese eine solche mit erheblich größerem Umfang, und dass zweitens der CHORAL nicht dazu gehört. Viele Jahre hatte ich mich an der Hypothese von Rechtsteiner orientiert, bis mich mehr und mehr faszinierte, wie perfekt die Stelle des Abbruchs der FUGA gestaltet ist...

Im folgenden werde ich zeigen, dass jede der drei real vorliegenden Gruppen zu 372 Takten jeweils klar definierte Bezüge zu FUGA und CHORAL haben, ohne dass es nötig wäre, die FUGA zu verlängern. Diese Bezüge funktionieren genau dann, wenn die FUGA A 3 SOGGETTI mit ihrem 239. Takt abbricht und auch der CHORAL dazugehört. Ich habe für jede Gruppe untersucht, ob es Bezüge zur FUGA bzw. zum CHORAL gibt, die irgendwie geartete Symmetrien aufweisen. Nun ist es keineswegs so, dass diese Bezüge offen zu Tage liegen. Sie sind unauffällig. Es handelt sich um wenige Merkmale, die jeweils eine Relation zwischen einem Einzelstück der Gruppe und einem Teil der FUGA oder dem

⁴³ Rechtsteiner, S. 40 ff.

⁴⁴ Corten, S. 203

CHORAL herstellen, und zwar ausschließlich. Dabei werden alle Stücke jeder Gruppe genau einem Teil der FUGA oder dem CHORAL zugeordnet.

CONTRAPUNCTI 1 BIS 4, 372 TAKTE

CONTRAPUNCTUS 1 und FUGA Teil 3:

Nur in diesen Teilkompositionen gibt es jeweils 11 alleinige Einsätze des betreffenden Themas. (Der 12. Einsatz in FUGA Teil 3 ist in Kombination mit den anderen Themen und wird deshalb hier nicht mitgezählt).

Musikalisch gibt es mehrere Symmetrien wie zum Beispiel die Übereinstimmung des ersten Tons von CONTRAPUNCTUS 1 mit dem letzten Ton von FUGA Teil 3 oder der unauffällige, etwa in der Mitte an völlig unerwarteter Stelle angebrachte Einsatz des Themas aus FUGA Teil 1 (siehe Seite 20 unten).

Zur Proportion der Anzahl von Takten beider Stücke ist anzumerken, dass deren Differenz $78 - 47 = 31$ beträgt. Und diese Zahl 31 ist genau ein Zwölftel von 372, der Taktsumme der Vierergruppe.

CONTRAPUNCTUS 2 und FUGA Teil 2:

Nur diese beiden Stücke haben je 13 Themeneinsätze (im zweiten Teil der FUGA sind es 8 Einsätze des Eigenthemas und 5 Einsätze des Themas aus FUGA Teil 2).

Die Proportion der Taktzahlen mag etwas sperrig erscheinen, aber hat doch eine gewisse Besonderheit: $84 = 6 \times 14$ und $78 = 6 \times 13$. Beide Taktzahlen haben als größten gemeinsamen Teiler die 6. Diese wird jeweils multipliziert mit den unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen 13 und 14.

CONTRAPUNCTUS 3 und CHORAL

Proportion der Taktzahlen: 45 teilt 72 im Verhältnis des Goldenen Schnittes⁴⁵. Die Berechnung ist leider ein wenig zu ungenau; exakt gerechnet wäre 45 der Goldene Schnitt von $72,86^{46}$ und somit korrekt gerundet 73. Aber wenn man zur Berechnung aus der Fibonacci-Folge

⁴⁵ Siehe dazu auch S. 33

⁴⁶ $45 \times 34 / 21 = 72,86$

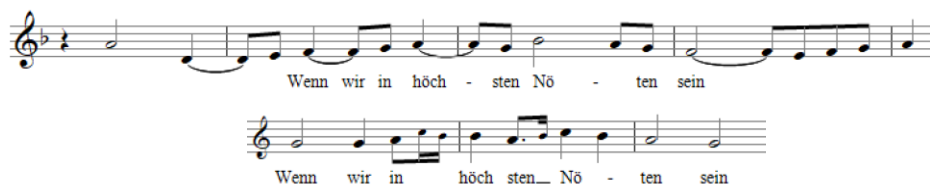
niedrigere Zahlenpaare verwendet, trifft das Ergebnis genau: 45 und 72 sind jeweils das neunfache von den Zahlen 5 und 8 aus der Fibonacci-Folge⁴⁷. Auch interessant ist eine andere algebraische Folge, die 45 und 72 direkt enthält: 9-18-27-45-72-117-189-.... Wir können daher sehr wohl von einem Verhältnis, das als Goldener Schnitt gelten kann, ausgehen.

Die Form von CONTRAPUNCTUS 3 kann als dreiteilig beschrieben werden (siehe S. 24), aber ebenfalls ist die Aufteilung in *vier* Abschnitte überzeugend:

- 4 reguläre Einsätze, danach Zwischenspiel, 22 Takte
- 3 synkopische, auf 15 Töne erweiterte Einsätze (also zusammen 45 Töne entsprechend der Taktzahl 45 des CHORALS), danach Zwischenspiel, 20 Takte
- 2 reguläre Einsätze und dazwischen Zwischenspiel, 12 Takte
- 2 nicht synkopische, aber wieder auf 15 Töne erweiterte Einsätze plus 1 regulärer Einsatz, 18 Takte.

Als vierteilige Form entspricht CONTRAPUNCTUS 3 in dieser Hinsicht dem ebenfalls vierteiligen CHORAL.

Die auf 15 Töne erweiterte Form des Themas, die nur in CP 3 vorkommt, zitiert die erste Verszeile des CHORALS. Im Notenbeispiel das Thema mit unterlegtem Choraltext:



CONTRAPUNCTUS 4 und FUGA Teil 1

Die Proportion der Taktzahlen ist $138 = 23 \times 6$ (CP) zu $115 = 23 \times 5$ (FUGA). Wir sehen also ein ähnlich ungewöhnliches Zahlenverhältnis wie bei CONTRAPUNCTUS 2 und FUGA Teil 2. Hier haben beide Taktzahlen als größten gemeinsamen Teiler die Primzahl 23. Wieder sind die

⁴⁷ Siehe S. 44

Multiplikatoren des gemeinsamen Teilers zwei direkt aufeinanderfolgende Zahlen.

Beide Stücke haben 18 Themeneinsätze (in FUGA Teil 1 kommen zu den 18 regulären Einsätzen noch fünf gespiegelte und ein punktgespiegelter dazu). 18 Einsätze *eines* Themas gibt es darüber hinaus nur in den CONTRAPUNCTI 8 und 11; dort handelt es sich jedoch um ein Seitenthema bzw. um das stark veränderte Hauptthema.

CONTRAPUNCTI 8 UND 11, 372 TAKTE

Die drei Themen der FUGA A 3 SOGGETTI begegnen uns in variiertester Gestalt in den CONTRAPUNCTI 8 und 11. Beide sind wie die FUGA ebenfalls Tripelfugen, die eine drei- und die andere vierstimmig. Beide CONTRAPUNCTI sind fast gleich lang. Sie unterteilen den Zyklus im Goldenen Schnitt, gemessen an der Anzahl der Stücke, und zwar bildet die Position des CONTRAPUNCTUS 8 den Goldenen Schnitt der 13 CONTRAPUNCTI, während CONTRAPUNCTUS 11 im Goldenen Schnitt aller 18 Stücke des Zyklus steht.

Das erste Thema der FUGA wird in Cp 8 und Cp 11 in Gestalt des Hauptthemas repräsentiert (Die Verwandtschaft dieser beiden Themen ist von vielen Forschern benannt worden).



Das zweite Thema der FUGA findet wird in Cp 8 und Cp 11 im charakteristischen Quartsprung angedeutet:



Die thematische Verwandtschaft zwischen den drei Tripelfugen CONTRAPUNCTUS 8, 11 und FUGA A 3 SOGGETTI findet ihre Entsprechung in ihrem proportionalen Beziehungen:

Teil 2 der FUGA hat 78 Takte. Ein Kreis mit dem Radius 78 hat einen Umfang von 492. Dies ist die Taktsumme der CONTRAPUNCTI 8, 10 und 11⁵⁰.

⁵⁰ Cp 10 zählt zwar nicht zu den Tripelfugen, ist aber durch sein markantes Eigenthema aufs engste mit diesen verbunden. Siehe S. 25

Teil 3 der FUGA hat 47 Takte. Dies ist genau ein Viertel von CONTRAPUNCTUS 8 (188 Takte).

Auch der CHORAL kommt hier ins Spiel:

Fasst man den CHORAL mit Teil 1 der FUGA zusammen, erhält man $115 + 45 = 160$ Takte. Dies entspricht sehr genau dem Durchmesser eines Kreises mit dem Umfang der Taktsumme von CONTRAPUNCTUS $8+9+11 = 188+130+184 = 502$.⁵¹

CHORAL und Teil 2 der FUGA haben zusammen 123 Takte; dies ist genau ein Viertel der gemeinsamen Taktmenge von Cp 8, 10 und 11 mit 492 Takten.

Nimmt man zum Teil 3 der FUGA den CHORAL hinzu, so sind es 92 Takte. Dies ist exakt die Hälfte von CONTRAPUNCTUS 11 (184 Takte).

Wir sehen also, dass einerseits jeder Teil der FUGA A 3 SOGGETTI in einem jeweils eigenen rechnerischen Verhältnis mit den beiden anderen Tripelfugen CONTRAPUNCTUS 8 und 11 verbunden ist; bei Teil 1 ist es der Goldene Schnitt, bei Teil 2 die Kreisformel, bei Teil 3 ganzzahlige Multiplikation. Andererseits kommt auch der CHORAL ins Spiel.

Teil 1 ohne CHORAL steht in Relation zu Cp 8 und Cp 11,

Teil 1 mit CHORAL zu Cp 8, 9 und 11.

Teil 2 ohne CHORAL zu Cp 8, 10 und 11,

Teil 2 mit CHORAL ebenfalls zu Cp 8, 10 und 11, jedoch auf andere Rechenart.

Teil 3 ohne CHORAL steht in Relation zu CONTRAPUNCTUS 8,

Teil 3 mit CHORAL zu CONTRAPUNCTUS 11.

Die hier aufgezeigten Beziehungen zwischen den drei Tripelfugen CONTRAPUNCTUS 8 und 11 sowie FUGA, im Zusammenspiel mit den Doppelfugen CONTRAPUNCTUS 9 und 10 und dem CHORAL haben eine hohe Aussagekraft zur Frage, ob der Abbruch der FUGA gewollt ist und ob der CHORAL dazu gehört, denn die Quellenlage der CONTRAPUNCTI 8 bis 11 ist unproblematisch. Es ist nämlich bei diesen Stücken völlig unstrittig, wieviele Takte zu zählen sind (im Gegensatz zur Zählung bei den Spiegelfugen und den Wiederholungen in

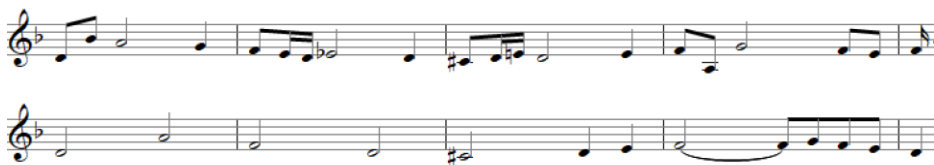
⁵¹ $502:\pi=159,79$

Kanons). Die Grundlagen der durchgeführten Berechnungen sind objektiv belegbar. Sie funktionieren aber nur, wenn die FUGA wie im Autograph genau in Takt 239 abbricht.

CANONES, 372 TAKTE

Die vier CANONES sind im Grunde zweistimmige Fugen mit jeweils einem klar erkennbaren Thema. Alle diese vier Themen sind Varianten des Hauptthemas. Darüber hinaus ist jeder CANON auf spezifische Weise mit der FUGA beziehungsweise mit dem CHORAL verknüpft.

Der **CANON PER AUGMENTATIONEM IN CONTRARIO MOTU** umspielt das Hauptthema.



Das Thema des CANONS AUG. kann jedoch auch als Paraphrase des Themas von FUGA Teil 1 verstanden werden. Dies ist ein Alleinstellungsmerkmal. Der an ein „m“ oder eine liegende „3“ erinnernde spiegelsymmetrische Melodiebogen des Fugenthemas wird im CANON leicht gekippt. Die Quintsprünge an Anfang und Ende werden zu Sextsprüngen, der tiefste Ton in der Mitte wird zu einer Umschreibung in kleinst möglichen Intervallfolgen.



In der Anzahl der Takte finden wir eine nicht uninteressante Proportion. Der CANON PER AUGMENTATIONEM IN CONTRARIO MOTU hat zusammen mit dem Teil 1 der FUGA 224 Takte, das ist 16 mal 14. Zusammen mit dem CHORAL hat der CANON AUG. 154 Takte, das ist 11 mal 14. Das halte ich – auch ganz von der symbolischen Bedeutung der 14 als Bachs Namenszahl – für bemerkenswert, denn die Länge des CANON AUG., eine Primzahl, ergibt addiert entweder mit der Länge des ersten Teils der FUGA (115) oder mit der Länge des CHORALS (45), die beide auch nicht durch 14 teilbar sind, jeweils eine durch die selbe Zahl 14 teilbare Summe.

Der **CANON ALLA OTTAVA** zitiert als einziger CANON die Tonfolge b-a-c-h, und zwar jeweils im Kregsgang und mit zweimaligem „c“ (Takte 9-10 sowie 85-86, in der Unterstimme jeweils vier Takte später). Er steht dadurch in thematischer Verbindung mit dem Teil 3 der FUGA. Sein Thema umspielt das Hauptthema, meist gespiegelt:



Mit der Tonfolge „b-a-c-h“ verweist der CANON OTT. Auf des Thema des dritten Teils der FUGA. Das geschieht von Takt 9 auf 10 sowie von Takt 85 auf 86, in der Unterstimme jeweils vier Takte später. Das „b-a-c-h“ erklingt im Kregsgang; das „c“ wird wiederholt, ähnlich wie in CONTRAPUNCTUS 8 und 11 (dort dreimal).



Zur Proportion fällt auf, dass 148, die Summe der Takte des CANON OTT.(103) und des CHORALS (45) dem Goldenen Schnitt der ganzen FUGA (239) recht genau entspricht (239,6).

Der **CANON ALLA DECIMA CONTRAPUNTO ALLA TERZA** ist der einzige CANON mit dem originalen Hauptthema. Es erklingt neun mal, immer in seiner gespiegelten Form, rhythmisch ähnlich wie in CONTRAPUNCTUS 2 (wenn in jenem die Punktierungen triolisch gespielt werden):



Dagegengesetzt werden bewegte Achtelfiguren, häufig auch schnelle Läufe. Eine gewisse Verwandtschaft lässt sich feststellen auch mit CONTRAPUNCTUS 9. Auch in dieser Doppelfuge wird die originale Form des Hauptthemas verwendet, dort den Läufen des Eigenthemas entgegengesetzt; insgesamt sind es 18 Themeneinsätze, doppelt so viele wie im CANON DEC. Ebenfalls gibt es eine formale Entsprechung zwischen CANON DEC. und dem zweiten Teil der FUGA. Auch dort bildet das Eigenthema mit seiner schnellen Bewegung und Läufen einen Kontrast zu dem wie ein Cantus firmus eingesetzten ersten Thema der FUGA.

Was die Zahl der Takte des CANON DEC. betrifft, so fällt auf, dass die Summe von CANON und CHORAL (82 + 45) exakt der Summe beider Spiegelfugen (56 + 71) entspricht.

Der CANON DEC. endet mit einer zu improvisierenden Cadenza. Dieser für die gesamte KUNST DER FUGE einmalige Vorgang signalisiert einen Abschluss. Welchen Sinn könnte das haben? Eine mögliche Antwort sehe ich im Vergleich wiederum mit dem zweiten Teil der FUGA, insbesondere mit dessen Ende und dem Übergang zum dritten Teil mit dem b-a-c-h-Thema. Im Gegensatz zum Übergang vom ersten zum zweiten Teil der FUGA, wo sich das Ende des ersten und der Beginn des zweiten überlappen, die Teile quasi ineinander fließen, bildet, bevor der dritte Teil anfängt, der zweite einen markanten Abschluss, bevor etwas ganz herausragendes folgt, nämlich eine Fuge über den Namen des Komponisten mit einem offenen Ende. Vielleicht soll die Cadenza am Ende des CANONS die Verwandtschaft zum zweiten Teil der FUGA unterstreichen.

Ich fasse zusammen: Unter dem Gesichtspunkt von Thematik und formaler Gestaltung liegen eindeutige Relationen vor zwischen CANON AUG. und FUGA Teil 1, CANON OTT. und FUGA Teil 3 sowie CANON DEC. und FUGA Teil 2.

Es bleibt der **CANON ALLA DUODECIMA IN CONTRAPUNTO ALLA QUINTA**. Er assoziiert die metrische Zweiteilung des Themas von CONTRAPUNCTUS 10. Jenes hat in der ersten Hälfte zweimal drei Viertel, getrennt durch eine Viertelpause, also sechs Viertel, und in der zweiten Hälfte einen Achtellauf auf- und abwärts. Im Thema des CANON DUODEC. Besteht der erste Abschnitt aus zwei Sextolen, der zweiten bringt Achtelläufe ab- und aufwärts.



Zu den Proportionen: Die Taktsumme von CANON DUODEC. (78) und CHORAL (45) beträgt 123 Takte. Das ist ein Viertel der Taktsumme der CONTRAPUNCTI 8, 10 und 11⁵² (492). Und es ist eine Anspielung auf den Namen des Komponisten. $123 = 3 \times 41$ (Buchstabenwert von JSBACH). Und die Zahl 123 ist Bestandteil der arithmetischen Folge 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199,...

Wir sehen: Alle Gruppen zu 372 Takten stehen in einem Beziehungsgeflecht auf verschiedenen Ebenen zu den drei Teilen der FUGA und dem CHORAL. Diese jeweils klar definierten Relationen bestehen genau dann, wenn die FUGA nicht hypothetisch erweitert wird und wenn der CHORAL zur KUNST DER FUGE gehört.

SCHNECKEN UND KREISE

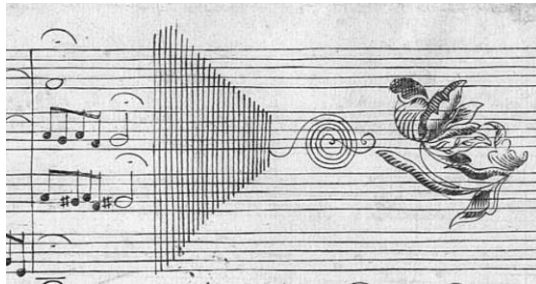
Wir kehren noch einmal zurück zur Idee, die Struktur auf Kreisverhältnisse zu beziehen. Natürlich kann jede beliebige Zahl als Umfang eines Kreises dargestellt und der dazu gehörige Radius errechnet werden. Relevant für eine Strukturanalyse ist dies dann, wenn Umfang und Radius eines Kreises einen konkreten Bezug zur Komposition haben, wenn zum Beispiel die Taktsumme einer nach konkret definierten Kriterien zusammengestellten Gruppe von Einzelstücken dem Umfang eines Kreises oder Halbkreises entspricht und ein anderes Einzelstück, welches zu den betreffenden Kriterien passt, dem Radius oder Durchmesser.

Stehen die beiden Zahlen im Verhältnis 1 zu 2π , bezeichnet die kleinere den Radius, die größere den Umfang des Vollkreises.

Wenn zwei Taktzahlen im Verhältnis 1 zu π stehen, bezeichnet die kleinere den Radius und die größere den entsprechenden Halbkreis. Aus einer Folge von mehreren jeweils in diesem Verhältnis zueinander stehenden Zahlen kann eine Schnecke gebildet werden. Das ist insofern interessant, als im Originaldruck

⁵² Siehe S. 26

der KUNST DER FUGE am Ende mehrerer Stücke ein Schneckenornament angebracht ist. Ein besonders auffälliges am Ende von CONTRAPUNCTUS 3:



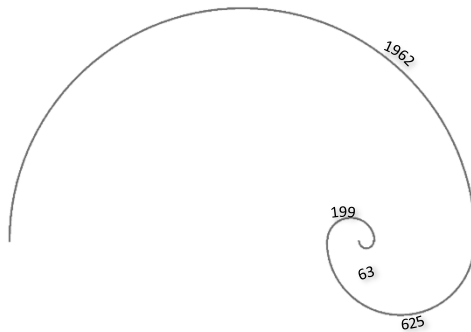
Für alle Berechnungen gilt: es wird immer auf ganze Zahlen, also ganze Takte gerundet. Dabei gibt es kleine Differenzen je nachdem, ob von der größeren Zahl die kleinere errechnet wird, oder von der kleineren die größere. Durch zahlreiche vergleichende Berechnungen, auch mit dem Annäherungswert 3,14 bzw. 6,28, anstelle der genauen Zahl π habe ich festgestellt, dass im Falle der KUNST DER FUGE immer von der größeren zur kleineren Zahl zu rechnen ist. Das passt nebenbei auch gut zur Form der Schneckenornamente, die fast alle von außen nach innen laufen.

Wie bereits erwähnt, lassen sich aus Zahlenfolgen, die jeweils im Verhältnis 1 zu π stehen, also wie der Radius zum Halbkreis, **Schnecken** konstruieren, ähnlich den Schneckenhäusern in der Natur, die oft nach den Proportionen der Fibonacci-Folge gewachsen sind (siehe oben auf Seite 42 f.).

Aus den in der KUNST DER FUGE gegebenen Zahlen lassen sich mehrere Folgen bilden, indem jeweils die größere von zwei Zahlen durch π dividiert wird. Geometrisch bedeutet das: Der Radius eines Halbkreises wird zum Umfang des nächstkleineren Halbkreises. Dessen Radius wiederum zum Umfang des nächstkleineren Halbkreises, usw.

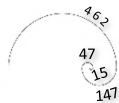
Ganzer Zyklus

1962 (ganzer Zyklus) - 625 (Cp 10+11, CANONDEC, FUGA) - 199 (=Cp 3+12+13) - 63 (GS von CANONOTT)



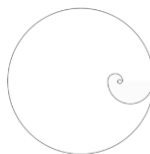
Erste Gruppe (CONTRAPUNCTUS 1 bis 5)

462 (Cp 1-5) - 147 (Goldener Schnitt der FUGA) - 47 (FUGA Teil 3) - 15 (auf mehrfache Weise strukturbildende Zahl⁵³)



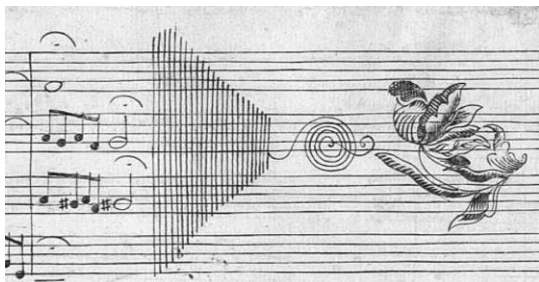
CONTRAPUNCTUS 11

184 (Vollkreis) - 29 (S+D+G - Soli Deo Gloria) - 9 (Anzahl der Töne im weitgespannten Tenor im Anschluss an die singuläre Triole) - 3 (singuläre Triole in Takt 101)



⁵³ Siehe S. 46 f.

Und hier nochmal das Schneckenornament aus dem Erstdruck:



Dieses Ornament aus 24 senkrechten Linien mit einer angehängten Schnecke befindet sich am Ende von CONTRAPUNCTUS 3. Die senkrechten Linien wirken wie eine Fortsetzung des Schlusstriches, sich mehr und mehr entfernend. Dann läuft die Linie in der Spirale kreisend zur Mitte hin. Von dort wächst eine weitere, kleinere Spirale heraus. Neben ihr blüht eine Blume.

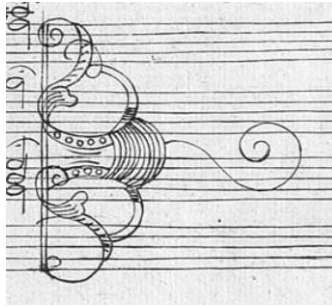
Schwer vorstellbar, dass dieses Ornament eine Ausschmückung ohne versteckte Bedeutung sein sollte.

Die 24 Linien könnten für 24 Einzelstücke bzw. Abschnitte von Einzelstücken stehen: Cp 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8a, 8b, 8c, 9, 10a, 10b, 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 13a, 13b, 4 Kanons,

die 24 Linien könnten auch für die 24 Einsätze des ersten Themas der FUGA stehen (24 Einsätze im ersten Teil bzw. 24 Einsätze in der Urgestalt in der gesamten FUGA),

die Schnecke für die FUGA und die aus deren Zentrum kommende kleine Spirale für den CHORAL.

Senkrechte Linien in unterschiedlicher Anzahl finden sich an verschiedenen Stellen im Erstdruck, auch Schnecken. Sehr interessant ist auch die Version am Ende von CONTRAPUNCTUS 6:

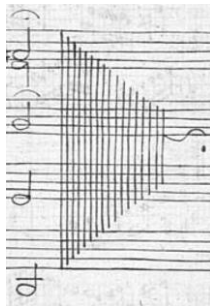


11 senkrechte gekrümmte Linien und 5 bzw. 3 kleine Kringel. Über eine Zuordnung kann man spekulieren.

Die Schnecke hat eine umgekehrte Drehrichtung.

In den größeren Elementen könnte man ein „SDG“ identifizieren.

Am Ende von CONTRAPUNCTUS 7 ist das Ornament viel schlichter, aber wieder sind es senkrechte Linien und eine - hier eher angedeutete - Schnecke.



Die 17 senkrechten Linien können für 13 CONTRAPUNCTI und 4 CANONES stehen, die Schnecke für die FUGA.

Wie auch immer man die Auszierung von Schlussstrichen mit Schnecken erklären mag, - das Symbol der Schnecke wird in unterschiedlichen Kulturen mit Geburt, Leben und Tod, Ewigkeit, Sterben und Auferstehen, verbunden. Vermutlich hat Bach die Schnecke in ähnlichem Sinne gedacht. Dass die Schnecken an den verschiedenen Stellen unterschiedlich ausgearbeitet sind, kann Absicht sein, kann aber auch Zufall sein, kann auch einfach damit

zusammen hängen, dass unterschiedliche Notenschreiber und Notenstecher die Druckplatten hergestellt haben.

PROPORTIONALE ZUORDNUNG ALLER EINZELKOMPOSITIONEN ZUR FUGA

Bei der Suche nach symmetrischen Proportionen in der KUNST DER FUGE ist zu erkennen, dass die Einzelstücke oder Gruppen von Stücken so einander zugeordnet werden können, dass sie jeweils im selben Verhältnis stehen wie Radius und Umfang eines Kreises, also im Verhältnis 1 zu 2π (siehe S. 10 und S. 31). Dies ist dann von Bedeutung, wenn die sich auf diese Weise rechnerisch ergebenden Beziehungen auch unter anderen Aspekten relevant sind, etwa in thematischer Verwandtschaft. Bei einer Zuordnung der Stücke zu Kreisen gibt es objektive Befunde, die ich für erheblich aussagekräftiger halte als bei den Schnecken.

Besonders interessant sind Kreisproportionen in Bezug auf die FUGA a 3 SOGGETTI. Wenn es vergleichbare Proportionen bei allen drei Teilen der FUGA gibt, sollte dies ein Hinweis auf eine geplante Konstruktion sein. Wenn sich der dritte Teil nach dem gleichen mathematischen Verhältnis einordnen lässt wie die beiden anderen Teile, wird man auch ihn als abgeschlossen komponiert ansehen dürfen.

DIE TEILE DER FUGA ENTSPRECHEN JEWEILS DEM UMFANG EINES KREISES.

Was ist festzustellen, wenn die drei Teile der FUGA jeweils als Umfang eines Kreises betrachtet werden?

Ein Kreis mit dem Umfang 114 (**erster Teil der FUGA**) hat den Radius **18**⁵⁴, das ist die Anzahl der Einzelstücke des Zyklus (zu weiteren Bedeutungen der Zahl 18 siehe Seite 35)

⁵⁴ korrekt auf ganze Zahl gerundet: $114 : 2\pi = 18,14$ oder, wenn der erste Teil der FUGA mit 115 Takten (siehe zur Problematik der Taktzahl S. 29) gezählt wird: $115 : 2\pi = 18,3$

Ein Kreis mit dem Umfang 78 (**zweiter Teil**) hat den Radius **12** ⁵⁵; das ist die Anzahl der Töne des Hauptthemas in seiner Urgestalt. Es ist auch die Anzahl der Buchstaben des Titels „KUNST DER FUGE“.

Als **dritten Teil** für diese Berechnung fasse ich den dritten Fugenteil mit dem sich anschließenden CHORAL zusammen. Warum dies gerechtfertigt ist, zeige ich weiter unten ab Seite 69. Wir haben es dann mit 92 Takten zu tun. Der Radius des entsprechenden Kreises beträgt **15** ⁵⁶. Die Zahl 15 ist in der KUNST DER FUGA auf mehrfache Weise strukturbildend (siehe S. 46 f.).

Die Radien der drei Teile der FUGA – einschließlich des CHORALS! – sind die Zahlen 18, 12 und 15, welche alle drei in vielerlei Hinsicht für die KUNST DER FUGE von großer Bedeutung sind, wie bereits auf den Seiten DIE ZAHL 18, 24 und 46 erläutert. Für eine Antwort auf die Fragestellung meiner Untersuchungen ist die Tatsache relevant, dass FUGA und CHORAL taktgenau in einem *einheitlichen* mathematischen Verhältnis zu drei Zahlen stehen, die für den ganzen Zyklus eine strukturbildende Rolle spielen. Später werden diese drei Zahlen noch ausführlicher besprochen (Seite 74).

Die den drei Teilen der FUGA zugeordnete Folge von jeweils kleineren Kreisen lässt sich fortsetzen:

Dem 3. Teil der FUGA mit 47 Takten als Umfang eines Kreises entspricht ein Radius von sieben Takten. $47 : 2\pi = 7,48$ oder gemäß der kürzeren Version des Originaldruckes $41 : 2\pi = 6,53$. Das entspricht den sieben Takten des letzten Abschnitts mit der Zusammenführung der drei Themen, also denjenigen Takten, die nur das Autograph enthält.

Den sieben Takten mit der Zusammenführung der drei Themen am Ende der FUGA als Umfang eines Kreises entspricht als Radius der letzte Takt. $7 : 2\pi = 1,11$.

Im letzten Takt entspricht das einstimmige Achtelmotiv dem Umfang und der letzte Ton, der über die Terz erreicht wird, dem Radius.

Die FUGA A 3 SOGGETTI und ihre Abschnitte können gemessen an ihren Taktzahlen also als Radien von konzentrischen Kreisen verstanden werden. Der Mittelpunkt dieser Kreise kann im allerletzten Ton, dem Grundton d, gesehen werden.

⁵⁵ $78 : 2\pi = 12,41$

⁵⁶ $92 : 2\pi = 14,64$

Gemäß dem lateinischen Titel „FUGA“ mit „a“ fliehen die Stimmen zum Ziel hin, allerdings – völlig überraschend, schockartig – über den letzten Takt hinaus in den Choral.

Die Spirale im abgebildeten Ornament entspricht gewissermaßen diesen immer enger werdenden Kreisen. Die Linie, die schließlich aus der Mitte herausführt, kann für den CHORAL stehen. Dazu mehr auf Seite 69ff.

Nun betrachten wir die umgekehrte Zuordnung.

DIE TEILE DER FUGA ENTSPRECHEN JEWEILS DEM RADIUS EINES KREISES

Jeder der drei Teile der FUGA lässt sich einer bestimmten Gruppe von drei bzw. drei mal drei CONTRAPUNCTI und CANONES zuordnen. Dabei werden alle Stücke erfasst. Wichtig: Jede Gruppierung erfolgt nach einem klar definierten eindeutigen Kriterium, das die jeweils restlichen Teilstücke des Zyklus ausschließt.

Dem **ersten Teil** der FUGA werden zugeordnet:

- die beiden einzigen CONTRAPUNCTI, welche das Hauptthema in seiner Originalgestalt verwenden (keine Spiegelung, keine Durchgangsnoten, keine Punktierungen, kein Dreiertakt), nämlich Cp 1 und 9,
- sämtliche einthemigen CONTRAPUNCTI, die bereits im Autograph enthalten sind.

Es sind also die CONTRAPUNCTI 1-3, 5-7, 9, 12, 13. Diese neun Stücke haben zusammen 721 Takte. Ein Kreis mit dem Umfang 721 hat den Radius 114,75. Gerundet ist das 115. Und tatsächlich hat der erste Teil der FUGA seinen Abschlussakkord im Takt 115, während im Takt 114 bereits das Thema des zweiten Teils einsetzt.

Bei der Zuordnung des **zweiten Teils** der FUGA spielt ein bestimmtes Detail seines Themas eine wesentliche Rolle, und zwar der Quartsprung, der durch einen Sekundschrift aus der Gegenrichtung eingeleitet wird. Diese kleine

charakteristische Figur ist genau dieselbe, welche in den Eigenthemen von CONTRAPUNCTUS 8, 10 und 11 vorliegt:



Im zweiten Thema der FUGA wird diese Figur durch fünf vorangestellte Achtel eingeleitet:



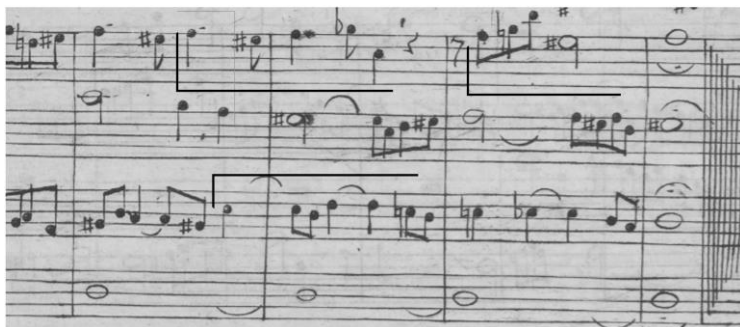
Entsprechend dieser thematischen Beziehung ordne ich dem zweiten Teil der FUGA die drei CONTRAPUNCTI 8, 10 und 11 zu. Sie haben zusammen 492 Takte. Diese Zahl als Umfang eines Kreises ergibt für dessen Radius die Zahl 78,3. Also gerundet 78. Das ist die Anzahl der Takte des zweiten Teils der FUGA.

Dem **dritten Teil** der FUGA sind jene drei Stücke zugeordnet, die es im Autograph nicht gibt, die offenbar für den Druck neu komponiert wurden. Es sind dies CONTRAPUNCTUS 4 und diejenigen beiden CANONES, in deren Titel auch das Wort „CONTRAPUNTO“ enthalten ist, nämlich CANON ALLA DECIMA CONTRAPUNTO ALLA TERZA und CANON ALLA DUODECIMA IN CONTRAPUNTO ALLA QUINTA. Diese drei Stücke haben zusammen 298 Takte. Ein Kreis mit dem Umfang 298 hat einen Radius von 47,42. Das ist gerundet 47 und entspricht genau der Taktzahl des dritten Teils der FUGA.

Tatsächlich gibt es in den drei für den Druck neu komponierten Stücken einige Befunde, die eine besondere Beziehung zum dritten Teil der FUGA andeuten:

In CONTRAPUNCTUS 4 zitiert der Tenor im dritt- und viertletzten Takt die Töne b-a-c-h, worauf der Sopran das Stück mit der Floskel beendet, die schon hier das

melodische Gebilde andeutet, das als Überleitung aus der FUGA in den CHORAL verstanden werden kann, siehe Seite 71.



Die beiden anderen für den Druck zusätzlich komponierten Stücke sind CANON ALLA DECIMA und CANON ALLA DUODECIMA. Wie auch in beiden anderen CANONES gründet ihre Thematik auf dem Hauptthema der KUNST DER FUGE. Es lassen sich in beiden zusammen 14 Themeneinsätze identifizieren, wodurch wiederum das $b+a+c+h$ repräsentiert wird.

Der Übersicht halber seien die drei Kreise noch einmal kurz aufgelistet:

- FUGA Teil 1 – CONTRAPUNCTI 1,2,3, 5,6,7, 9,12,13
- FUGA Teil 2 – CONTRAPUNCTI 8, 10, 11
- FUGA Teil 3 – CONTRAPUNCTUS 4, Zwei CANONES „IN CONTRAPUNTO“

Alle 15 Stücke, deren Überschriften das Wort „CONTRAPUNCTUS“ beziehungsweise „IN CONTRAPUNTO“ enthalten, können - in Gruppen zu je drei beziehungsweise drei mal drei Stücken zusammengefasst - nach dem jeweils selben mathematischen Verhältnis den drei Teilen der FUGA zugeordnet werden. Das mathematische Verhältnis ist für alle drei Teile das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisradius.

Was aber ist mit jenen Stücken, deren Überschriften das Wort „CONTRAPUNCTUS“ *nicht* enthalten, also die FUGA A 3 SOGGETTI, der CANON PER AUGMENTATIONEM IN CONTRARIO MOTU und der CANON ALLA OTTAVA? Tatsächlich stehen auch sie als Gruppe zusammengefasst im selben mathematischen Verhältnis zu einer anderen Teilkomposition, und zwar zu CONTRAPUNCTUS 3. Die FUGA und die beiden CANONES haben zusammen 451 Takte. Der Radius eines Kreises mit dem Umfang 451 beträgt 71,78, gerundet 72. Das einzige Stück in der KUNST DER FUGE mit 72 Takten ist CONTRAPUNCTUS 3. Diese Sonderrolle von CONTRAPUNCTUS 3 bei der Zuordnung nach dem Verhältnis von

Kreisumfang zu Radius ist insofern plausibel, als er einige wichtige Alleinstellungsmerkmale im Zyklus aufweist.

CONTRAPUNCTUS 3

CONTRAPUNCTUS 3 ist das erste Stück in der Abfolge des Originaldruckes, welches die Spiegelung des Hauptthemas verwendet und Varianten des Themas mit Achtern und Synkopen bringt. Außerdem eine Menge Chromatik.

CONTRAPUNCTUS 3 ist das einzige Einzelstück, in dessen Taktmenge sich sowohl die Buchstabenanzahl des Titels „KUNST DER FUGE“, die Anzahl der Töne des Hauptthemas und die Anzahl der Einzelstücke des Zyklus darstellen lassen. $72 = 6 \cdot 12$ und $72 = 4 \cdot 18$.

CONTRAPUNCTUS 3 ist das einzige Einzelstück, dessen drei Abschnitte ein pythagoreisches Tripel darstellen: $18 - 24 - 30$, also dasselbe Zahlenverhältnis wie bei den Tönen im Hauptthema und den Buchstaben im Werktitel (3–4–5).

Mehr zu CONTRAPUNCTUS 3 auf Seite 25 und Seite 38.

Auf diese Weise sind alle Einzelstücke erfasst:

- **FUGA Teil 1 – CONTRAPUNCTI 1,2,3, 5,6,7, 9,12,13**
- **FUGA Teil 2 – CONTRAPUNCTI 8, 10, 11**
- **FUGA Teil 3 – CONTRAPUNCTUS 4, Zwei CANONES „IN CONTRAPUNTO“**
- **CONTRAPUNCTUS 3 – FUGA, CANON AUG., CANON OTT.**

Dabei sind bis auf CP 3 und FUGA alle Stücke genau einmal erfasst. CP 3 und FUGA sind je einmal als Radius und einmal als Umfang mitgerechnet.

Außerdem kann dieses Ordnungssystem zusätzlich durch drei größere Kreise ergänzt werden. Von diesen hat nach meiner Einschätzung nur der erste Relevanz. Beiden anderen fehlt ein gemeinsames Kriterium für die Auswahl der zusammengefassten Stücke, das nicht auch für andere Stücke gelten würde; d. h. die Auswahl wurde gezielt so getroffen, damit es rechnerisch passt. Dennoch möchte ich auch die beiden größten Kreisberechnungen nicht ganz außer acht lassen.

- Wenn die komplette FUGA mit ihren 239 Takten als Radius genommen wird, so entspricht diesem ein Umfang von 1500 Takten. Dies ist die Taktsumme aller Stücke von CONTRAPUNCTUS 6 („In Stylo francese“ – Ouverture) bis zum Ende der FUGA. $1500 : 2\pi = 238,73$, gerundet 239 (siehe Seite 10).

- Wenn der gesamte Zyklus (ohne CHORAL) als Umfang gerechnet wird, so beträgt der Radius 1962 : $2\pi = 312,26$, gerundet 312 Takten. Diese Zahl entspricht der Taktsumme der drei Gegenfugen CONTRAPUNCTI 5, 6, 7 und dem CANON DECIMA; das ist der CANON, der mit seiner Cadenza eine formale Sonderrolle einnimmt.
- *Mit* dem CHORAL würde der Umfang 2007 Takte betragen, der Radius 2007 : $2\pi = 319,42$ und gerundet 319 Takte. Diese Zahl lässt sich darstellen als Taktsumme der CONTRAPUNCTI 3, 9, 12 und 13. Diese vier Stücke kann man durchaus als eine sinnvolle Zusammenstellung für die Berechnung des Radius des Gesamtwerkes betrachten, denn jedes von ihnen zeichnet sich durch sehr spezielle Eigenheiten aus, aber es fehlt das gemeinsame Kriterium. Die Besonderheiten von Cp 3 wurden schon mehrfach hervorgehoben. Cp 9 zeichnet sich nicht nur durch seine formale Funktion als einer Art motivischer Verklammerung der Tripelfugen Cp 8 und 11 aus, sondern auch durch die Gestalt seines ersten Abschnitts, in welchem die Einsätze des charakteristischen Eigenthemas in absolut ungewöhnlicher Abfolge erklingen. Cp 12 und 13 sind die beiden Spiegelfugen.

Für die Aufgabenstellung der vorliegenden Arbeit bleibt in diesem Zusammenhang die bedeutendste Feststellung, dass den drei Teilen der FUGA A 3 SOGGETTI sämtliche anderen Einzelstücke der KUNST DER FUGE nach einem gleichbleibenden mathematischen Prinzip vollständig und eindeutig zugeordnet werden können, wobei die Gruppen nach jeweils eindeutigen Kriterien zusammengestellt sind. Dieser objektive Sachverhalt lässt meines Erachtens kaum einen anderen Schluss zu als den, dass der Komponist diese Ordnung geplant und im Laufe der Arbeit an der KUNST DER FUGE durch zahlreiche kleinere und größere Anpassungen erreicht hat.

Die konstruktive Idee, die Proportionen in Kreisen zu bemessen, spiegelt sich offensichtlich auch in dieser Blüte wider:



Die Blüte mit konzentrischen Kreisen bildet das Zentrum des großen Ornamentes, das im Originaldruck zwischen CONTRAPUNCTUS 5 und CONTRAPUNCTUS 6 angebracht ist.



Ich vermute, dass dieses Ornament allegorisch gelesen werden darf und die Form der KUNST DER FUGE darstellt.

DER CHORAL

Der angeblich nur als Ersatz abgedruckte CHORAL⁵⁷ ist nicht nur in sich selbst beziehungsreich proportioniert: Die erste Verszeile des cantus firmus hat 14 Töne (b+a+c+h), der komplette cantus firmus 41 Töne (j+s+b+a+c+h); die letzte melodische Phrase in Alt und Tenor hat je 9 Töne (9+9 kann als Buchstabenwert von J.J. = „Jesu juva“ gelesen werden und 18 ist die Anzahl der Einzelstücke der KUNST DER FUGE), der für den Schluss hinzugefügte Bariton hat ebenfalls 18 Töne; zusammen mit den gleichzeitig erklingenden 9 Basstönen wird die Coda des CHORALS aus 45 Tönen gebildet, entsprechend der Anzahl der Takte des CHORALS. Sondern der CHORAL steht auch in enger Verbindung zur FUGA. Dies zeige ich im folgenden.

⁵⁷ Siehe die dem Originaldruck vorangestellte „Nachricht: Der selige Herr Verfasser dieses Werkes wurde durch seine Augenkrankheit und den kurz darauf erfolgten Tod ausser Stande gesetzt, die letzte Fuge, wo er sich bey Anbringung des dritten Satzes namentlich zu erkennen giebet, zu Ende zu bringen; man hat daher die Freunde seiner Muse durch Mittheilung des am Ende beygefügtten vierstimmig ausgearbeiteten Kirchenchorals, den der selige Mann in seiner Blindheit einem seiner Freunde aus dem Stegereif in die Feder dictiret hat, schadlos halten wollen.“

- Der CHORAL hat fast genau die gleiche Anzahl von Takten wie der dritte Teil der FUGA. Eine Zusammenfassung des dritten Fugenteils und des CHORALS zeigt bei den Kreisberechnungen ein überraschendes Ergebnis, siehe S. 63.
- Es gibt melodisch-rhythmische Ähnlichkeiten bis hin zu identischen Elementen, vgl. FUGA Takt 230, 231 und CHORAL u.a. Takt 44, 45:



- Im CHORAL erfolgt im Takt 34 ein regelwidriger dissonanter Einsatz im Bass, im Fugenteil hören wir in den Takten 224, 225 geradezu atemberaubende Dissonanzen. Es sind vom Beginn des dritten Fugenteils gezählt die Takte 32 und 33. Beide harmonisch singulären Stellen sind also nahezu gleich positioniert.



DIE PARALLELE ZUR LEIPZIGER ORGELHANDSCHRIFT

In der Leipziger Orgelhandschrift heißt es auf dem Titelblatt „Achtzehn noch ungedruckte Choralvorspiele.....“. Das Wort „ungedruckte“ ist unterstrichen, Dies ist interessant im Hinblick auf die KUNST DER FUGE. „Vor deinen Thron“ ist nämlich der 19. Choral in der Orgelhandschrift. Offenbar gab es während der

Fertigstellung der Handschrift diesen Choral bereits gedruckt oder zumindest für den Druck vorbereitet, wenn auch mit anderem Text! Nämlich als Ende der KUNST DER FUGE. Und deshalb heißt es im Titel der Handschrift „Achtzehn ungedruckte.....“ und nicht etwa „Neunzehn ungedruckte....“.

Die Parallelität zwischen Orgelhandschrift und KUNST DER FUGE ist auffällig: in beiden Fällen sind es 18 Kompositionen + 1 Choral.

DIE ÜBERLEITUNG

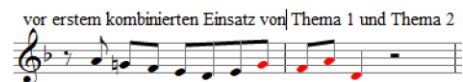
Angenommen, der CHORAL soll tatsächlich den Abschluss der KUNST DER FUGE bilden, so leistet der letzte Takt der FUGA eine erstaunliche Überleitung zum CHORAL.

Diese Überleitung vom letzten Takt des dritten Fugenteils zum CHORAL wird bereits von Beginn des zweiten Teils der FUGA an vorbereitet durch die Art und Weise, wie mit dem im Notenbeispiel markierten Element dieses Themas im Verlauf des Fugenteiles verfahren wird.

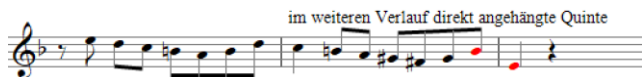


Das markierte 7-Achtelmotiv wird unmittelbar am Ende des ersten Themeneinsatzes wiederholt, noch bevor der zweite Themeneinsatz erfolgt. Zu beachten: an die aufsteigende Terz am Ende dieses Motivs schließt sich eine schrittweise Abwärtsbewegung an. Die Achtel fließen weiter.

Doch später, direkt bevor zum ersten Mal die Kombination aus den Themen des ersten und des zweiten Teils der FUGA erklingt, wird an das 7-Achtelmotiv ein Dreiklang angehängt, und zwar so, dass die Figur mit einer fallenden Quinte endet. Danach pausiert diese Stimme.



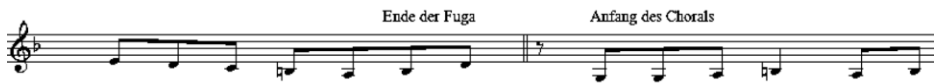
Im weiteren Verlauf dieses Fugenteils wird immer häufiger eine fallende Quinte unmittelbar an das 7-Achtelmotiv angehängt:



So auch am Abschluss, bevor der dritte Teil der FUGA mit den Tönen „b-a-c-h“ beginnt:



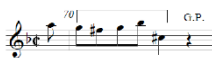
Die Behandlung des 7-Achtel-Motivs im Verlauf des zweiten Fugenteils erzeugt auf diese Weise die Erwartung, dass nach dem letzten 7-Achtelmotiv, also bei Abbruch der FUGA, logischerweise ebenfalls eine fallende Quinte kommen müsste. Und sie kommt! Allerdings erst nach einer Pause.



GENERALPAUSEN

Angenommen, der CHORAL gehört tatsächlich zur FUGA, so bildet die letzte Tenornote der FUGA eine Art Halbschluss, dem eine Generalpause und schließlich die Weiterführung mit der ersten Tenornote des CHORALS folgen. Im Vergleich mit den anderen Generalpausen in der KUNST DER FUGE fällt auf, dass sie alle in melodischer Hinsicht sehr ähnlich sind. Dabei folgt die Generalpause in den CONTRAPUNCTI immer erst *nach* dem fallenden Sprung (meist ein Quintsprung). Am Ende der FUGA hingegen schon unmittelbar *vor* dem Sprung. Wenn man all diese Stellen als Abfolge hört, verstärkt die am Ende der FUGA überraschend vorgezogene Generalpause die Dramatik.

CONTRAPUNCTUS 1



CONTRAPUNCTUS 6



CONTRAPUNCTUS 13



Darüberhinaus gibt es in einigen anderen CONTRAPUNCTI ähnliche Wendungen, in welchen anstelle einer Generalpause der Fluss der Musik jedoch ohne anzuhalten fortgesetzt wird:

CONTRAPUNCTUS 2



CONTRAPUNCTUS 4



CONTRAPUNCTUS 7

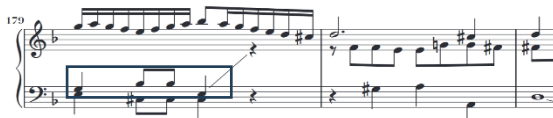


Auch folgende Stellen können, wenn auch weniger deutlich ausgeprägt, als verwandt bezeichnet werden:

CONTRAPUNCTUS 3



CONTRAPUNCTUS 8



CONTRAPUNCTUS 9



Im Vergleich mit anderen Werken Bachs zeigt sich, dass diese Art von Generalpausen und Trugschlüssen in der KUNST DER FUGE ein Charakteristikum dieses Zyklus sind. Immer wird der Halb- oder Trugschluss in einer fallenden Quinte erreicht (Ausnahme: verminderte Septime in CONTRAPUNCTUS 1; dort ist jedoch die vorausgehende Achtelfigur identisch mit den letzten Tönen im Takt 239 der FUGA).

All diese über den gesamten Zyklus verteilten Stellen können als Vorbereitung des Überganges von der FUGA in den CHORAL bewertet werden.

DER DREIKLANG

Die oben ausgeführten Bemerkungen zur Bedeutung der Zahlen 12, 15, 18 für die Struktur der KUNST DER FUGE sind schließlich unter einem weiteren Aspekt zu betrachten. Diese drei Zahlen können als Frequenzen eines reinen Durdreiklangs gelesen werden. Je nach Stimmton liegt dieser Dreiklang irgendwo zwischen F-dur und A-dur. Idealerweise ist er als G-dur zu benennen. Dann nämlich hat er direkte Bezüge zur KUNST DER FUGE:

18 Hz – das tiefste noch für das menschliche Ohr wahrnehmbare D, der Grundton des Zyklus.

15 Hz – ein H, das vielleicht geradeso noch hörbar ist. Der tiefste Ton, welcher in der KUNST DER FUGE vorkommt, im CANON PER AUGMENTATIONEM, ist ein H.

12 Hz – ein nicht mehr mit dem Ohr wahrnehmbares „G“. Der CHORAL hat den Grundton G.

Die drei Töne h, d und g bilden den Übergang von der FUGA zum CHORAL

Nun muss allerdings geprüft werden, ob die Annahme plausibel ist, Bach habe die Frequenz von 12 Hz dem Ton G zugeordnet. Bekanntermaßen gab es zu seiner Zeit keinen allgemein gültigen einheitlichen Stimmton.

Die Frequenz von 12 Hz ist genau dann ein Ton G, wenn man den Sekundenschlag, also die Frequenz von 1 Hz, als C definiert. Dem entspricht je

nach Temperierung ein Stimmtön mit 428 bis 432 Hz. Dieser Stimmtön wurde zu Bachs Zeit unter anderem von Joseph Sauveur⁵⁸ in einer Abhandlung von 1713 vorgeschlagen⁵⁹:

(64) Dans l'Histoire de l'Académie de 1700 et dans les Mémoires de 1701, j'avais déterminé le son fixe par celui qui faisait 100 vibrations par seconde, parce qu'alors étant occupé à mon système général des intervalles des sons, je ne pris ce nombre que par provision.

(65) Mais faisant attention que l'étendue des sons selon l'aigu et le grave, est partagée par octaves selon la progression du double et que par les articles 49 et 52, j'ai trouvé que la Clef de C-Sol-Ut faisait environ 243 1/5 vibrations, j'ai fait d'abord la progression double suivante, que j'ai accompagnée des puissances de 2.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768, 65536.

(...)

(71) Ayant ensuite trouvé que le nombre 256 de cette progression double approchait le plus de 243 1/5 de l'article 52, j'ai pris le son qui faisait 256 vibrations, pour le son fixe de l'octave moyenne; en sorte que les nombres suivants 512, 1024, 2048, etc. forment les sons fondamentaux de la 1^{ère}, 2^e, 3^e octaves fixes, et les précédents 128, 64, 32, etc. la 1^{ère}, 2^e, 3^e sous-octaves.

(...)

(74) À l'imitation des facteurs d'orgue, nous désignerons aussi le son fondamental PA par celui du tuyau d'orgue de 2 pieds ouvert, qui rend à peu près ce son, les PA des octaves en montant par ceux de 1 pied 6 pouces, et ainsi de moitié en moitié, et les PA des sous-octaves, par 4, 8, 16, 32 pieds

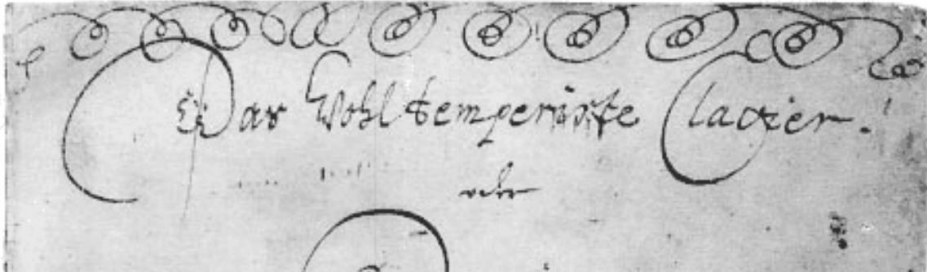
⁵⁸ Joseph Sauveur (1653–1716), frz. Wissenschaftler, führte die Bezeichnung „Akustik“ für die Lehre vom Schall ein. Mattheson schreibt „Zu unsern Zeiten ist dieses Glück der Natur-Lehre des Klanges durch zween geschickte und gelehrte Frantzosen, die Herren Sauveur und Dodart, ... sehr wohl behandelt....“ (Der vollkommene Kapellmeister, Drittes Kapitel §27). Auch Mizler nennt den Namen Sauveur (Musikalische Bibliothek 3. Teil, 1737, S. 55, <https://archive.org/details/MusikalischeBibliothek1.band1736-38/page/n235/mode/2up>). Das heißt, Sauveur war im Umkreis von Bach kein Unbekannter.

⁵⁹ Joseph Sauveur, Rapports des sons des cordes d'instruments de musique, aux flèches des cordes; et nouvelles déterminations de sons fixes, Histoire de l'académie royale des sciences, 1713, p. 338, zitiert nach:

Emmanuel Comte, De l'origine du diapason scientifique et de la détermination de la hauteur des sons, 2018, <https://sonologie.ca/origine-diapason-scientifique/>

Auch die Überprüfung der auf dem Titelblatt des Wohltemperierten Klaviers skizzierten Stimmanweisung Bachs lässt zu, dass die Frequenz 12 Hz dem Ton G zugeordnet wird.

Die Krinkel über dem Titel zeigen vermutlich an, um wieviele Schwebungen die Quinten jeweils zu verkleinern sind (vermutlich ist die Anzahl von Schwebungen pro Sekunde gemeint).



Wie der Mathematiker und Musiker Heinz Hilscher aufzeigt⁶⁰, ergibt sich aus dieser Stimmanweisung, wenn man sie mathematisch exakt umsetzt, rechnerisch zwingend ein Stimmtone a mit 418 Hz. Nur dann passt die Geschwindigkeit der Schwebungen exakt. Dann hat g' die Frequenz 373,109. Dem entspricht fünf Oktaven tiefer das G mit 11,66 Hz, etwa ein Viertelton unter 12 Hz.

Meine eigene Berechnung ergab, bei gleicher Temperierung ausgehend von genau G=12 Hz, also g'=384 Hz, einen Stimmtone a=430 Hz. Die sich dann ergebenden Schwebungen zwischen den Quinten sind um 1,45 % bzw. 2,9 % schneller als man aus der kleinen Grafik Bachs ableiten kann, wenn man davon ausgeht, dass Bach eine bzw. zwei Schwebungen genau am Sekundentakt abgemessen hat. Diese kleine Ungenauigkeit scheint mir beim Abmessen von ein bzw. zwei Schwebungen pro Sekunde allerdings im Toleranzbereich zu liegen, so dass auch nach der autographen verschlüsselten Stimmungsanweisung für die Frequenzen 12, 15, 18 ein reiner G-dur-Dreiklang angenommen werden kann.

Für ein Werk wie die KUNST DER FUGE, das neben allen anderen Aspekten auch, und zwar wesentlich, einen theoretischen Aspekt hat, bietet sich natürlich an, innerhalb des Bereichs möglicher Stimmtöne einen solchen anzunehmen, der

⁶⁰ Heinz Hilscher, Hinweise zu Bachs Cembalostimmung, bach magazin Heft Nr. 43, 2024, S. 44

physikalisch definiert ist, d. h. von einem C mit *einer* Schwingung pro Sekunde ausgeht.

Daher können für die KUNST DER FUGE die Zahlen 12 – 15 – 18 als G-dur-Dreiklang benannt werden. Daraus ergibt sich ein weiterer Zusammenhang zwischen der KUNST DER FUGE und dem CHORAL.

G-dur, der Tonikadreiklang des Chorals, spiegelt wider:

die Anzahl der Töne des Hauptthemas bzw. der Buchstaben des Werktitels (12, Ton G),

die Anzahl der Einzelstücke „Contrapunctus“/“contrapunto“, tiefster Ton des Zyklus (15, Ton H),

die Anzahl aller Fugen und Contrapuncte sowie die Tonart des Zyklus (18, Ton D).

Zur Einordnung des CHORALS in den Zyklus KUNST DER FUGE erinnere ich an dieser Stelle an die Ausführungen auf Seite 53 und 50.

SCHLUSSBEMERKUNG

In vier Jahrzehnten der Beschäftigung mit Bachs KUNST DER FUGE hat sich mein Verständnis dieses faszinierenden Werkes gewandelt. Mehrere Jahre habe ich mich auf den von Rechtsteiner entwickelten hypothetischen Idealplan gestützt. Mittlerweile meine ich, Erkenntnisse gewonnen zu haben, die in eine andere Richtung weisen, weg von einer sehr geraden Achsensymmetrie, hin zu einer dynamischeren, nicht minder raffinierten und auf andere Art symmetrischen, sehr lebendigen Form voller innerer Beziehungen, die zum Teil unabhängig sind von zeitlichen Verläufen. Die kreisförmigen, teils rekursiven Strukturen⁶¹ können im linearen zeitlichen Verlauf einer Aufführung nicht in

⁶¹ Einerseits bildet die FUGA die Radien der Kreise der CONTRAPUNCTE, andererseits bildet die FUGA zusammen mit zwei CANONES den Kreis um CONTRAPUNCTUS 3 Radius.

direkter Entsprechung dargestellt werden.⁶² Für die Reihenfolge der einzelnen Stücke im Konzert bietet sich die Orientierung am Originaldruck an.

Das zentrale Stück, auf das sich alle anderen Teilkompositionen des Zyklus beziehen, ist die „FUGA A 3 SOGGETTI“. Das lateinische Wort „Fuga“ = „Flucht“ besagt, dass die Stimmen einander nachjagen, zu einem Ziel hinfliehen. Tatsächlich fliehen die vier Stimmen über den letzten Takt hinaus in den CHORAL.

Am Ende der FUGA erklingen ihre drei Themen gleichzeitig. Dazu könnte als vierter Kontrapunkt dasjenige Thema gespielt werden, welches als „Hauptthema“ die Grundlage zu allen anderen Teilkompositionen der Kunst der Fuge bildet. Diesen Kontrapunkt zu den drei Themen der FUGA hat Bach selbst jedoch nicht in die FUGA eingearbeitet, sondern in weit überhöhter Gestalt zu selbständigen weiteren Einzelkompositionen ausgearbeitet. Daher heißen diese Fugen und Kanons im Originaldruck nicht „FUGA“, sondern „CONTRAPUNCTUS“ bzw. tragen in ihrem Titel den Zusatz „IN CONTRAPUNTO“. Alle diese „CONTRAPUNCTI“ können proportional den drei Teilen der FUGA nach klar definierten Kriterien eindeutig zugeordnet werden. Zusammengefasst zu Gruppen aus je drei bzw. drei mal drei Stücken verhält sich deren Anzahl von Takten zur Taktzahl der Fugenteile exakt so wie der Umfang eines Kreises zu seinem Radius.

Gewissermaßen umkreisen die beiden CANONES AUG. und OTT. mit der FUGA den CONTRAPUNCTUS 3. Und umgekehrt umkreisen alle CONTRAPUNCTI gemeinsam die FUGA A 3 SOGGETTI spiralförmig auf das Ziel zu, welches jedoch innerhalb der KUNST DER FUGE nicht erreicht wird, - ebenso wenig wie Theologie, Philosophie/Mathematik, über deren Rangfolge im wissenschaftlichen Diskurs zu Bachs Zeit heftig gestritten wurde, die absolute Wahrheit erfassen können.

Zwei paradoxe Ideen kommen zum Ausdruck: Perfekte Symmetrien als Abbild der Vollkommenheit und das Fragmentarische, wie es nicht überzeugender gestaltet werden könnte am Ende der FUGA A 3 SOGGETTI. Das Prinzip der Symmetrie erreicht seinen Höhepunkt in der kompletten Spiegelung der CONTRAPUNCTI 12 und 13. Dabei drängt sich der Bezug zu einem bestimmten Bibelvers auf: Im 1. Brief des Paulus an die Korinther, Kapitel 13, Vers 12 heißt es: „Wir sehen jetzt durch einen Spiegel ein dunkles Bild; dann aber von

⁶² Daher halte ich für wenig relevant, an welcher Stelle die CANONES ihren besten Platz haben oder in welcher Reihenfolge die Spiegelfugenpaare zu spielen sind.

Angesicht zu Angesicht. Jetzt erkenne ich stückweise; dann aber werde ich erkennen, wie ich erkannt bin“.

Die Wurzel der KUNST DER FUGE liegt übrigens - zumindest mathematisch - im CHORAL. Alle CONTRAPUNCTI, CANONES und die FUGA haben zusammen 1962 Takte. Durch Addition von 45 für die Takte des CHORALS und 18 für die Anzahl aller Einzelstücke des Fugenzylus (oder auch für den Buchstabenwert des von Bach so gern notierten „J.J.“ – „Jesu, juva“ = „Jesus, hilf“) erhält man die Zahl 2025.

$$\sqrt{2025} = 45$$

Möglicherweise liegt die Wurzel auch in *übertragenem* Sinn im CHORAL⁶³, zumal er – wenn auch nicht in der gleichen Form – die mit Abstand älteste Teilkomposition im Originaldruck der KUNST DER FUGE ist. Sie ist im wesentlichen eine Umarbeitung und Erweiterung des gleichnamigen Choralvorspiels⁶⁴ aus Bachs ORGELBÜCHLEIN.

In der KUNST DER FUGE bringt der Komponist seine persönliche Frömmigkeit zum Ausdruck mit einer sprechenden, singenden Musik, deren Architektur aus einem vielschichtigen, hochkomplexen Geflecht aus mathematisch exakten Symmetrien unterschiedlichster Art besteht. Je nach Blickwinkel eröffnen sich immer wieder neue Aspekte.

© Wolfgang Kleber 2025

⁶³ Siehe Choraltext auf Seite 81

⁶⁴ Vermutlich aus den Jahren 1714/1715, siehe Sven Hiemke im Vorwort zur Neuausgabe sämtlicher Orgelwerke von J. S. Bach, Bd. VII, Breitkopf&Härtel 2011, Seite 8 f.

KUNST DER FUGE, AUFLISTUNG DER EINZELSTÜCKE	TAKTE
CONTRAPUNCTUS 1	78
CONTRAPUNCTUS 2	84
CONTRAPUNCTUS 3	72
CONTRAPUNCTUS 4	138
CONTRAPUNCTUS 5	90
CONTRAPUNCTUS 6 A 4 IN STYLO FRANCESE	79
CONTRAPUNCTUS 7 A 4 PER AUGMENT ET DIMINUT	61
CONTRAPUNCTUS 8 A 3	188
CONTRAPUNCTUS 9 A 4 ALLA DUODECIMA	130
CONTRAPUNCTUS 10 A 4 ALLA DECIMA	120
CONTRAPUNCTUS 11 A 4	184
CONTRAPUNCTUS A 4 (RECTUS, INVERSUS)	56
CONTRAPUNCTUS A 3 (RECTUS, INVERSUS)	71
CANON PER AUGMENTATIONEM IN CONTRARIO MOTU	109
CANON ALLA OTTAVA	103
CANON ALLA DECIMA CONTRAPUNTO ALLA TERZA	82
CANON ALLA DUODECIMA IN CONTRAPUNTO ALLA QUINTA	78
FUGA A 3 SOGGETTI	239
CHORAL WENN WIR IN HÖCHSTEN NÖTEN	45

1. Wenn wir in höchsten Nöten sein und wissen nicht, wo aus noch ein,
und finden weder Hilf noch Rat, ob wir gleich sorgen früh und spat,
2. so ist dies unser Trost allein, dass wir zusammen insgemein
dich anrufen, o treuer Gott, um Rettung aus der Angst und Not,
3. und heben unser Aug und Herz zu dir in wahrer Reu und Schmerz
und flehen um Begnadigung und aller Strafen Linderung,
4. die du verheißest gnädiglich allen, die darum bitten dich
im Namen deins Sohns Jesu Christ, der unser Heil und Fürsprech ist.
5. Drum kommen wir, o Herre Gott, und klagen dir all unsre Not,
weil wir jetzt stehn verlassen gar in großer Trübsal und Gefahr.
6. Sieh nicht an unsre Sünde groß, sprich uns davon aus Gnaden los,
steh uns in unserm Elend bei, mach uns von allen Plagen frei,
7. auf dass von Herzen können wir nachmals mit Freuden danken dir,
gehorsam sein nach deinem Wort, dich allzeit preisen hier und dort.

Text: Paul Eber (1566), Melodie: Guillaume Franc (1543), Johann Baptista Serranus (1567)

Das Zitat von Paul Hindemith auf dem Titelblatt stammt aus:

Paul Hindemith, Johann Sebastian Bach - Ein verpflichtendes Erbe, Insel-Verlag 1954, S. 38

Abbildungen aus dem Erstdruck: <https://imslp.org/wiki/Special:ImagefromIndex/23444/qrur>

Abbildung des letzten autographen Taktes:

https://www.bach-digital.de/receive/BachDigitalSource_source_00001074

Lektorat: Sophie Kleinmann